



**Уральский
федеральный
университет**

имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

**Институт естественных наук
и математики**

**И. А. БАШКИРЦЕВА
Т. В. РЯЗАНОВА
Л. Б. РЯШКО**

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Непрерывные модели

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

И. А. Башкирцева, Т. В. Рязанова, Л. Б. Ряшко

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Непрерывные модели

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом УрФУ
для студентов, обучающихся по программе бакалавриата
по направлениям подготовки 01.03.01 «Математика»,
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»,
02.03.02 «Фундаментальная информатика
и информационные технологии»,
09.03.03 «Прикладная информатика»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2017

УДК 519.876.5(075.8)
Б334

Рецензенты:

кафедра информационных технологий
АНО ВО «Гуманитарный университет»
(заведующий кафедрой

кандидат технических наук, доцент А. В. Агеносов);

Б. И. Ананьев, доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник

Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Башкирцева, И. А.

Б334 Компьютерное моделирование нелинейной динамики : Непрерывные модели : учеб. пособие / И. А. Башкирцева, Т. В. Рязанова, Л. Б. Ряшко ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. — 84 с.

ISBN 978-5-7996-2046-2

Учебное пособие является вводным курсом в методы моделирования и анализа разнообразных явлений нелинейной динамики, способствует развитию понимания внутренних механизмов сложных динамических процессов как детерминированных, так и стохастических систем, выработке навыков их компьютерного исследования.

Адресовано студентам и аспирантам естественно-научных направлений — математикам, физикам, химикам и биологам.

УДК 519.876.5(075.8)

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время при исследовании сложных динамических процессов, наблюдаемых в различных разделах естествознания, наряду с аналитическими методами широко применяется компьютерное моделирование. В качестве математических моделей широко используются системы дифференциальных уравнений.

Связи между взаимодействующими элементами динамических систем, как правило, носят нелинейный характер, что приводит к появлению разного рода нелинейностей в соответствующих математических моделях.

Нелинейные системы отличаются от линейных наличием несравненно большего разнообразия возможных режимов функционирования. Даже небольшое изменение параметров нелинейной модели может привести к резкому изменению динамики системы.

Исследования последних лет показали, что разнообразие динамики, наблюдаемое в нелинейных системах, можно свести к достаточно простым режимам, связанным с некоторыми повторяющимися для самых различных систем характерными типами решений. Эти характерные решения обладают важным свойством инвариантности. Более того, к ним притягиваются многие другие решения исследуемой системы. Знание таких решений — аттракторов — позволяет получить представление об общей качественной картине динамики исследуемой нелинейной системы.

Изменение параметров системы может существенно менять тип аттракторов. В этом случае говорят, что в системе произошла бифуркация.

Каждая бифуркация — это радикальное изменение в динамике системы, сопровождающаяся исчезновением одних и появлением других, принципиально новых, режимов функционирования. Одним из классических сценариев подобных преобразований служит

цепочка бифуркаций: равновесие (точка покоя) — периодический режим (предельный цикл) — хаотический режим (странный аттрактор).

Каждый переход в этой цепи сопровождается потерей устойчивости простого аттрактора и появлением нового, более сложного. Таким образом, решение задачи отыскания у исследуемой системы аттракторов и последующий анализ их устойчивости является важнейшим шагом в понимании тонких механизмов ее динамики.

Функционирование любой реальной системы сопровождается воздействием тех или иных случайных возмущений. Шум, действующий в системе, может существенно деформировать ее динамику.

Знакомство с широким кругом явлений нелинейной стохастической динамики, освоение методов их математического моделирования и компьютерного анализа представляется важной обязательной компонентой современного университетского образования студентов естественно-научных направлений — математиков, физиков, химиков и биологов.

В пособии обсуждаются основные явления и даются основы анализа нелинейных динамических систем, теории бифуркаций и стохастической динамики.

На примерах классических моделей излагаются основы теории устойчивости и стохастической чувствительности, приводятся методы построения фазовых портретов и численного моделирования детерминированных и случайных траекторий.

Заключительный параграф содержит набор заданий для компьютерного практикума.

1. ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО СВОЙСТВА

1.1. Основные понятия

Автономная система дифференциальных уравнений в общем n -мерном случае задается следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Ее векторная запись имеет вид

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — область определения функции $f(x)$. Предполагается, что при любых $x^{(0)}$ из X дифференциальное уравнение (1) имеет решение $x = \varphi(t, x^{(0)})$, определенное для всех $t \geq 0$, с начальным условием $x(0) = x^{(0)}$.

Подробное геометрическое изображение решения $x(t)$ с помощью графика — *интегральной кривой* — требует $(n + 1)$ -мерного пространства переменных t, x_1, \dots, x_n . Если при $n = 1$ интегральные кривые располагаются на плоскости (t, x_1) и их изображение не вызывает особых затруднений, то уже при $n = 2$ соответствующие интегральные кривые лежат в трехмерном пространстве (t, x_1, x_2) , что резко усложняет их наглядное представление.

1.2. Метод фазового пространства

Для сокращения размерности можно пожертвовать переменной t , оставив только так называемые фазовые переменные x_1, x_2, \dots, x_n , составляющие n -мерное *фазовое пространство*. При $n = 2$ фазовое пространство двумерно и называется *фазовой плоскостью*.

Проекция интегральной кривой $x(t)$ на фазовое пространство называется *фазовой кривой* или *фазовой траекторией*.

Множество фазовых кривых, отвечающих различным начальным данным, называется *фазовым портретом* системы. Во многих случаях фазовый портрет позволяет получить достаточно наглядное представление о динамике системы.

В каждой точке x фазового пространства системы (1) вектор $f(x)$ есть вектор скорости движения системы вдоль фазовой кривой, проходящей через эту точку. Вектор $f(x)$ указывает направление касательной к соответствующей фазовой кривой.

Множество точек фазового пространства с указанными в них направлениями составляют *поле направлений* системы (1). Поле направлений позволяет построить хотя бы приближенно фазовый портрет исследуемой системы. Для этого линии, изображающие фазовые кривые, следует провести так, чтобы в каждой своей точке они имели касательную, совпадающую с полем направлений.

1.3. Устойчивость

Основой качественного анализа динамических систем является исследование устойчивости.

Определение 1.1. Решение $\bar{x}(t)$ системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall t \geq 0 \quad \forall x^{(0)}$$

$$\|\bar{x}(0) - x^{(0)}\| < \delta \Rightarrow \|\bar{x}(t) - \varphi(t, x^{(0)})\| < \varepsilon.$$

В противном случае решение $\bar{x}(t)$ называется *неустойчивым*.

Определение 1.2. Решение $\bar{x}(t)$ системы (1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову, и

$$\exists \delta > 0 : \forall x^{(0)} \quad \|\bar{x}(0) - x^{(0)}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\bar{x}(t) - \varphi(t, x^{(0)})\| = 0.$$

Определение 1.3. Решение $\bar{x}(t)$ системы (1) называется *экспоненциально устойчивым*, если

$$\exists \alpha > 0 \quad \exists K > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall t \geq 0 \quad \forall x^{(0)}$$

$$\|\bar{x}(0) - x^{(0)}\| < \delta \Rightarrow \|\bar{x}(t) - \varphi(t, x^{(0)})\| \leq K e^{-\alpha t} \|\bar{x}(0) - x^{(0)}\|.$$

Определение 1.4. Множество $M \subset X$ называется *инвариантом* системы (1), если

$$\forall x^{(0)} \in M \quad \forall t \geq 0 \quad \varphi(t, x^{(0)}) \in M.$$

Если $x^{(0)} \in M$, то и во все последующие моменты времени $\varphi(t, x^{(0)}) \in M$. Простейшим примером инвариантного множества является точка покоя.

Определение 1.5. Точка $\bar{x} \in X$ называется *точкой покоя* системы (1), если

$$\forall t \geq 0 \quad \varphi(t, \bar{x}) = \bar{x}.$$

Если \bar{x} — точка покоя, то $f(\bar{x}) = 0$. Все точки покоя системы (1) находятся из решения системы

$$f(x) = 0. \tag{2}$$

Другим примером инвариантного множества является цикл.

Определение 1.6. Пусть $\xi(t)$ является T -периодическим решением системы (1): $\xi(t + T) = \xi(t)$. Множество $\Gamma = \{\xi(t) \mid 0 \leq t < T\}$ называется *циклом*.

В фазовом пространстве цикл изображается в виде замкнутой кривой. Возьмем в качестве начальной произвольную точку цикла. Можно показать, что фазовая кривая соответствующего решения совпадает с циклом.

Введем функцию $\rho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$, задающую расстояние от фиксированной точки x до множества Y .

Определение 1.7. Компактное инвариантное множество M системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если справедливо следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall t \geq 0 \quad \forall x^{(0)}.$$

$$\rho(x^{(0)}, M) < \delta \Rightarrow \rho(\varphi(t, x^{(0)}), M) < \varepsilon.$$

Определение 1.8. Компактное инвариантное множество M системы (1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову, и

$$\exists \delta > 0 : \forall x^{(0)} \quad \rho(x^{(0)}, M) < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\varphi(t, x^{(0)}), M) = 0.$$

При этом множество $U = \{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\varphi(t, x), M) = 0\}$ называется *областью (бассейном) притяжения* инвариантного множества M .

Определение 1.9. Компактное инвариантное множество M системы (1) называется *экспоненциально устойчивым*, если

$$\exists \alpha > 0 \quad \exists K > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall t \geq 0 \quad \forall x^{(0)}$$

$$\rho(x^{(0)}, M) < \delta \Rightarrow \rho(\varphi(t, x^{(0)}), M) \leq K e^{-\alpha t} \rho(x^{(0)}, M).$$

1.4. Фазовые портреты линейных систем

Рассмотрим двумерную ($n = 2$) линейную систему

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Пусть λ_1, λ_2 — собственные числа, а h_1, h_2 — линейно независимые собственные векторы матрицы A . По этим данным общее решение системы записывается аналитически

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2.$$

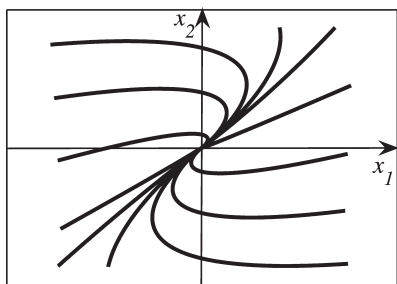
Здесь возможны следующие случаи:

а) λ_1, λ_2 — вещественные одного знака. Фазовый портрет — *узел* (рис. 1, а);

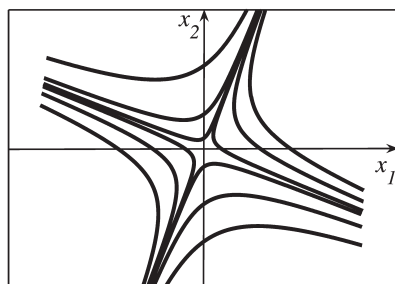
б) λ_1, λ_2 — вещественные разных знаков. Фазовый портрет — *седло* (рис. 1, б);

в) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ — комплексно сопряженные ($\alpha \neq 0$). Фазовый портрет — *фокус* (рис. 1, в);

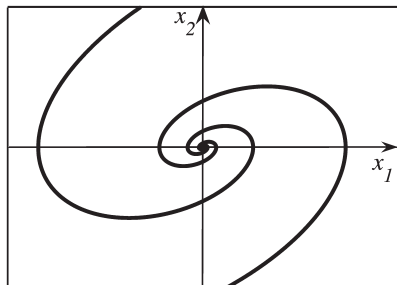
г) $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ — чисто мнимые. Фазовый портрет — *центр* (рис. 1, г).



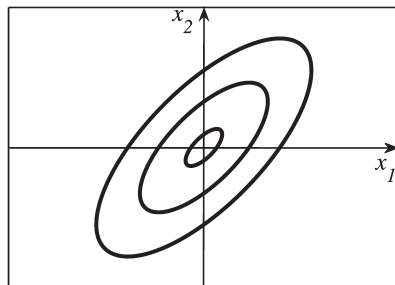
а



б



в



г

Рис. 1. Фазовые портреты линейной системы:

а — узел, б — седло, в — фокус, г — центр

При $Re \lambda_{1,2} < 0$ движение вдоль фазовых траекторий идет в направлении точки покоя $\bar{x} = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Точка покоя $\bar{x} = 0$ — асимптотически устойчива. Тогда говорят, что узел (фокус) является устойчивым.

При $Re \lambda_{1,2} > 0$ движение вдоль фазовых траекторий идет по направлению от точки покоя в бесконечность. Точка покоя $\bar{x} = 0$ неустойчива. В этом случае говорят, что узел (фокус) является неустойчивым.

В случае центра $Re \lambda_{1,2} = 0$ движение происходит по замкнутым фазовым траекториям вокруг точки покоя. Точка покоя $\bar{x} = 0$ устойчива (но не асимптотически).

В случае седла всегда имеется направление, движение по которому идет от точки покоя в бесконечность. Поэтому здесь точка покоя $\bar{x} = 0$ является неустойчивой.

Приведенная здесь детальная классификация фазовых портретов получена на основе аналитического представления для общего решения рассматриваемой линейной системы. Построение точных аналитических решений для нелинейных систем возможно лишь в каких-то частных случаях.

2. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ПОКОЯ

Если для построения фазового портрета нелинейной системы в основном используются лишь численные методы, то при исследовании характерных особенностей вблизи точки покоя возможен общий аналитический подход. Этот подход состоит в отыскании для исследуемой нелинейной системы некоторой близкой линейной, с тем чтобы по результатам анализа последней можно было судить об основных чертах динамики исходной нелинейной системы.

2.1. Система первого приближения

Рассмотрим способ построения линейной системы первого приближения в окрестности точки покоя исходной нелинейной системы. Для наглядности ограничимся сначала случаем двумерной ($n = 2$) системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (3)$$

Пусть $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ — точка покоя системы (3). Это означает, что

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Разложим в окрестности точки покоя \bar{x} правые части системы (3) — функции f_1 и f_2 — в ряды Тейлора:

$$\dot{x}_1 = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2) + \dots,$$

$$\dot{x}_2 = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2) + \dots$$

Первый член в каждом из этих разложений, благодаря (4), равен нулю. Далее идут линейные члены, за ними — слагаемые более

высоких порядков, которые вблизи точки покоя существенно меньше линейных.

Отбрасывая эти малые слагаемые и делая замену

$$z_1 = x_1 - \bar{x}_1, z_2 = x_2 - \bar{x}_2,$$

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2), a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2), a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2),$$

получим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a_{11}z_1 + a_{12}z_2, \\ \dot{z}_2 = a_{21}z_1 + a_{22}z_2. \end{cases}$$

Данная система получила название *системы первого приближения* для исходной нелинейной системы в окрестности точки покоя.

Системы первого приближения играют весьма важную роль в исследовании нелинейных систем. Как правило (если не рассматривать особые вырожденные случаи), общий характер фазового портрета нелинейной системы вблизи точки покоя совпадает с фазовым портретом соответствующей системы первого приближения.

Тип фазового портрета системы первого приближения, благодаря ее линейности, определяется достаточно просто — аналитически (см. раздел 1).

В случае общей n -мерной системы (1) в окрестности точки покоя \bar{x} замена $x = \bar{x} + z$ ($\|z\|$ — мало) и разложение Тейлора приводят к равенствам

$$\dot{x} = \dot{\bar{x}} + \dot{z} = f(\bar{x} + z) = f(\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})z + \dots$$

Отбрасывая нелинейные члены с учетом равенств

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}) = 0,$$

получим для малых отклонений

$$z = x - \bar{x}$$

состояния x от положения равновесия \bar{x} линейную систему первого приближения

$$\dot{z} = Az, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}). \quad (5)$$

2.2. Устойчивость точки покоя

Исследование устойчивости начнем с линейной системы (5). Для этой системы точкой покоя является вектор $\bar{z} = 0$. Анализ общего решения системы (5) позволяет получить следующие критерии.

Теорема 1. *Для того чтобы точка покоя $\bar{z} = 0$ системы (5) была устойчивой по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_i ($i = 1, \dots, n$) матрицы A имели неположительные вещественные части:*

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0.$$

При этом собственным значениям, лежащим на мнимой оси ($\operatorname{Re} \lambda_i = 0$), должны соответствовать клетки Жордана размерности единица.

Теорема 2. *Для того чтобы точка покоя $\bar{z} = 0$ системы (5) была экспоненциально устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_i ($i = 1, \dots, n$) матрицы A имели отрицательные вещественные части:*

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0.$$

Отметим, что в случае линейных систем понятия асимптотической и экспоненциальной устойчивости эквивалентны.

Если система (5) является экспоненциально устойчивой, то она остается таковой и при малых изменениях ее параметров. В случае, если система (5) просто устойчива по Ляпунову, отмеченное свойство уже не выполняется. Сколь угодно малые изменения параметров могут перевести собственные значения матрицы системы, лежащие на мнимой оси, в правую часть комплексной полуплоскости, что сделает систему уже неустойчивой.

Сформулируем теперь критерий устойчивости решения $x(t) \equiv \bar{x}$, являющегося точкой покоя нелинейной системы (1).

Теорема 3. Для того чтобы точка покоя \bar{x} системы (1) была экспоненциально устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы у системы первого приближения

$$\dot{\bar{z}} = A\bar{z}, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$$

была экспоненциально устойчивой точка покоя $\bar{z} = 0$.

Как видим, исследование экспоненциальной устойчивости точек покоя нелинейной системы сводится к выяснению знаков вещественных частей собственных значений матриц соответствующих систем первого приближения.

Пример

В качестве примера рассмотрим популяционную модель «хищник — жертва», в которой учитывается ограниченность ресурса для жертв и то естественное обстоятельство, что при большом количестве жертв у хищника наступает насыщение.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \alpha \frac{x}{1+x} y - \gamma x^2, \\ \dot{y} = -y + \beta \frac{x}{1+x} y. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь x — численность жертв, y — численность хищников, α, β, γ — положительные параметры.

Для отыскания точек покоя составим систему

$$\begin{cases} x - \alpha \frac{x}{1+x} y - \gamma x^2 = 0, \\ -y + \beta \frac{x}{1+x} y = 0. \end{cases}$$

Получаем три точки покоя:

$M_1: \bar{x}_1 = 0, \bar{y}_1 = 0$ — отсутствие хищников и жертв;

$M_2: \bar{x}_2 = \frac{1}{\gamma}, \bar{y}_2 = 0$ — отсутствие хищников и постоянная численность популяции жертв;

$M_3: \bar{x}_3 = \frac{1}{\beta-1}, \bar{y}_3 = \frac{\beta(\beta-1-\gamma)}{\alpha(\beta-1)^2}$ — равновесное состояние.

Ограничимся здесь рассмотрением поведения системы для следующего набора параметров: $\alpha = 1$, $\beta = 2$.

Составим матрицы соответствующих систем первого приближения.

Для точки $M_1(0, 0)$ матрица имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

У матрицы A_1 собственные значения

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

вещественны и имеют разные знаки. Фазовый портрет первой точки покоя — седло.

Для точки $M_2\left(\frac{1}{\gamma}, 0\right)$ матрица имеет вид

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{\gamma+1} \\ 0 & \frac{1-\gamma}{\gamma+1} \end{bmatrix}.$$

У матрицы A_2 собственные значения

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \frac{1-\gamma}{\gamma+1}.$$

График $\lambda_{1,2}$ имеет вид (рис. 2).

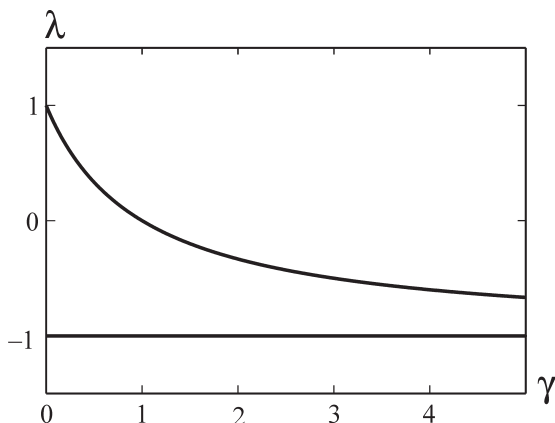


Рис. 2. Зависимость собственных чисел матрицы A_2 от параметра γ

В зависимости от параметра γ точка покоя M_2 имеет два возможных типа:

- 1) $0 < \gamma < 1$ — седло;
- 2) $\gamma > 1$ — устойчивый узел.

Для точки $M_3(1, 2 - 2\gamma)$ матрица системы первого приближения имеет вид

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{1-3\gamma}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1-\gamma & 0 \end{bmatrix}.$$

У матрицы A_3 собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \frac{1-3\gamma \pm \sqrt{9\gamma^2 + 2\gamma - 7}}{4}.$$

График $Re\lambda_{1,2}$ имеет вид (рис. 3).

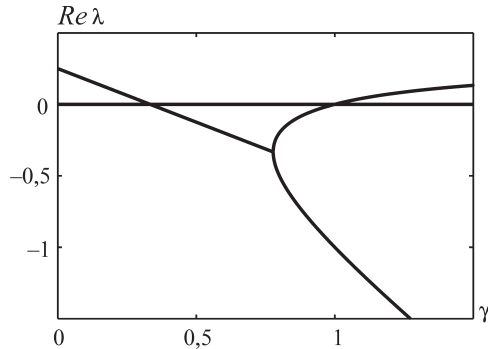


Рис. 3. Зависимость собственных чисел матрицы A_3 от параметра γ

В зависимости от параметра γ точка покоя M_3 имеет четыре возможных типа:

- 1) $0 < \gamma < \frac{1}{3}$ — неустойчивый фокус;
- 2) $\gamma = \frac{1}{3}$ — центр;
- 3) $\frac{1}{3} < \gamma < \frac{7}{9}$ — устойчивый фокус;
- 4) $\frac{7}{9} < \gamma < 1$ — устойчивый узел.

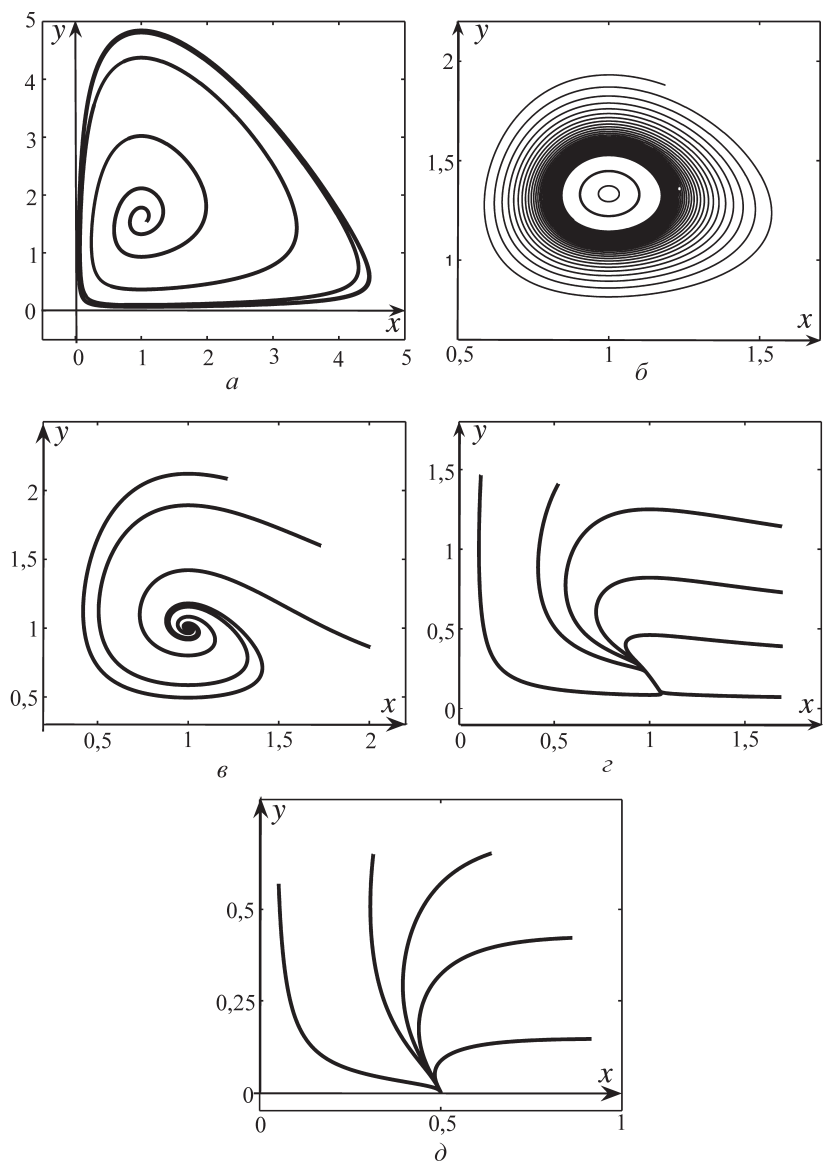


Рис. 4. Фазовые портреты системы (6) при: а — $\gamma = 0,2$; б — $\gamma = \frac{1}{3}$; в — $\gamma = 0,5$; г — $\gamma = 0,9$; д — $\gamma = 2$.

На рис. 4, *а* приведен фазовый портрет системы при $\gamma = 0,2$. Точка покоя M_3 является неустойчивой, траектории уходят от нее, раскручиваясь, и наматываются на предельный цикл. Независимо от выбора начальных соотношений численностей, система двух взаимодействующих популяций переходит в режим колебаний постоянной частоты.

На рис. 4, *б* приведен фазовый портрет системы при $\gamma = \frac{1}{3}$.

Тип точки покоя M_3 по системе первого приближения — центр. Траектории нелинейной системы около равновесия близки к замкнутым окружностям. Однако специфика нелинейной системы проявляется в том, что траектории составляют спирали.

На рис. 4, *в* приведен фазовый портрет системы при $\gamma = 0,5$.

Точка покоя M_3 устойчива, численность жертв и хищников стабилизируется. При этом наблюдаются колебания, амплитуда которых медленно стремится к нулю.

На рис. 4, *г* приведен фазовый портрет системы при $\gamma = 0,9$.

Точка покоя M_3 устойчива, численность жертв и хищников быстро стабилизируется.

На рис. 4, *д* приведен фазовый портрет системы при $\gamma = 2$.

Точка покоя M_2 устойчива, численность жертв стабилизируется, популяция хищников вымирает.

Здесь по системе первого приближения при различных значениях параметра удастся достаточно точно представить фазовый портрет исходной нелинейной системы вблизи точки покоя. Однако в области, удаленной от точки покоя, нелинейная система при $0 < \gamma < \frac{1}{3}$ имеет предельный цикл (рис. 4, *а*) — важнейшую особенность, которую система первого приближения уже никак не отражает.

Для того чтобы иметь возможность провести строгий математический анализ этой и других, более сложных моделей динамики популяции с автоколебаниями, приведем следующие необходимые сведения из качественной теории дифференциальных уравнений.

3. АНАЛИЗ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ЦИКЛА

Рассмотрим основные элементы теории исследования динамики системы вблизи периодических решений — циклов.

3.1. Основные понятия. Система первого приближения

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (7)$$

имеющую T -периодическое решение

$$x = \xi(t) \quad (\xi(t + T) = \xi(t)).$$

Графиком такого решения будет замкнутая фазовая кривая — цикл Γ . Точка $x_0 = \xi(0)$ отмечает на Γ начальное положение этого решения. Всякое решение, стартующее с любой другой точки цикла, будет двигаться по этой же замкнутой кривой. Цикл Γ — инвариантное множество системы (7).

Если начальную точку взять в окрестности цикла, то траектория соответствующего решения может вести себя различным образом. Здесь возможны следующие варианты:

а) решение приближается к циклу так, что отклонение от цикла стремится к нулю; другими словами, фазовая траектория наматывается на цикл;

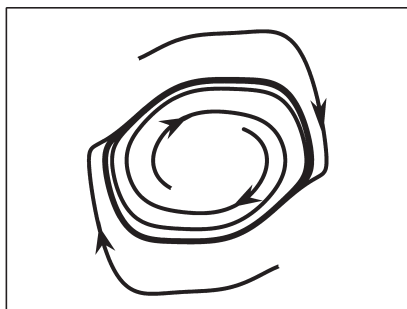
б) решение движется вдоль цикла и формирует замкнутую фазовую кривую — новый цикл, расположенный рядом с исходным;

в) решение удаляется от цикла; фазовая кривая разматывается по спирали.

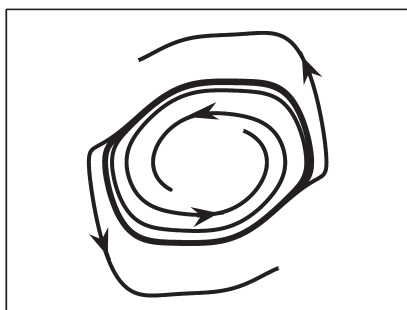
Среди возможных сочетаний динамики снаружи и внутри цикла обычно выделяют следующие:

а) устойчивый предельный цикл (рис. 5, а);

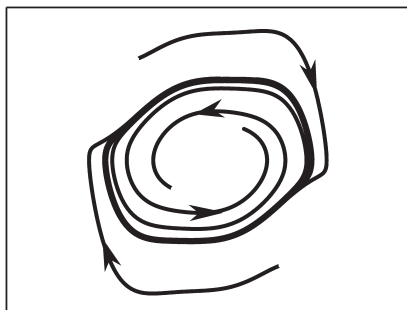
б) неустойчивый цикл (рис. 5, б);



a



б



в

Рис. 5. Циклы:
a — устойчивый; *б* — неустойчивый; *в* — полустойчивый

в) полуустойчивый цикл (рис. 5, в).

Нас интересуют условия, при которых предельный цикл имеет сильное экспоненциальное притяжение.

Предполагается, что в U — некоторой окрестности кривой Γ — определена функция $\gamma(x) = \operatorname{argmin}_{y \in \Gamma} \|y - x\|$, задающая для каждого x из окрестности U ближайшую к ней точку $\gamma(x)$ с цикла Γ . Тогда функция $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ задает отклонение точки x от цикла Γ .

Определение 3.1. Решение $\xi(t)$ будем называть *экспоненциально орбитально устойчивым*, если найдутся такие $\alpha > 0$, $K > 0$, что справедливо неравенство

$$\|\Delta(x(t))\| \leq Ke^{-\alpha t} \|\Delta(x_0)\|$$

для любого решения $x(t)$ системы (7) с начальным условием $x(0) = x_0 \in U$.

Динамика малых отклонений, как и в случае точки покоя, определяется системой первого приближения.

Рассмотрим для T -периодического решения $\xi(t)$ системы (7) новую переменную

$$z = x - \xi(t).$$

Подставив $x = z + \xi(t)$ в систему (7) и разложив ее правую часть в ряд Тейлора, получим

$$\dot{\xi} + \dot{z} = f(\xi(t) + z) = f(\xi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t))z + \dots$$

Отбрасывая нелинейные члены с учетом тождества

$$\dot{\xi} = f(\xi(t)),$$

получим линейную систему первого приближения

$$\dot{z} = F(t)z, \quad F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)). \quad (8)$$

Матрица $F(t)$ этой системы вслед за функцией $\xi(t)$ является T -периодической.

3.2. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Элементы теории Флоке

Рассмотрим для системы

$$\dot{z} = A(t)z, \quad (9)$$

где $A(t)$ — произвольная T -периодическая $(n \times n)$ -матрица, фундаментальную матрицу

$$Z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_n(t)],$$

составленную из линейно независимых решений системы (9) с начальными условиями

$$z_1(0) = (1, 0, \dots, 0)^T, \ z_2(0) = (0, 1, \dots, 0)^T, \ \dots, \ z_n(0) = (0, 0, \dots, 1)^T.$$

Лемма 1.

Для фундаментальной матрицы справедливо тождество

$$Z(t + T) = Z(t) \cdot Z(T). \quad (10)$$

Доказательство.

Рассмотрим вектор-функции $\tilde{z}_1(t) = z_1(t + T), \dots, \tilde{z}_n(t) = z_n(t + T)$ — столбцы матрицы $Z(t + T)$. Благодаря T -периодичности матрицы $A(t)$, справедливы соотношения

$$\dot{\tilde{z}}_i(t) = \dot{z}_i(t + T) = A(t + T)z_i(t + T) = A(t)z_i(t + T) = A(t)\tilde{z}_i(t),$$

означающие, что функции $\tilde{z}_i(t)$ также являются решениями системы (9). Последнее позволяет связать их при помощи фундаментальной матрицы $Z(t)$ со своими начальными значениями $\tilde{z}_i(t) = Z(t)\tilde{z}(0)$. Переписывая эти соотношения в исходных обозначениях $z_i(t + T) = Z(t)z_i(T)$, получим требуемое тождество (10).

Матрица $B = Z(T)$, задающая отображение за период T системы (9), называется *матрицей монодромии*.

Любое решение $z(t)$ системы (9) в моменты времени, кратные периоду, благодаря (10) легко выражается с помощью матрицы монодромии через начальные данные:

$$z(kT) = Z(kT)z(0) = Z((k - 1)T)Z(T)z(0) = \dots = B^k z(0).$$

Рассмотрим постоянную матрицу

$$\Lambda = \frac{1}{T} \ln B \quad (B = e^{T\Lambda})$$

и матричную функцию $\Phi(t) = Z(t)e^{-t\Lambda}$.

Лемма 2. Матричная функция $\Phi(t)$ является T -периодической. Доказательство следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \Phi(t + T) &= Z(t + T)e^{-(t + T)\Lambda} = Z(t)Z(T)e^{-T\Lambda}e^{-t\Lambda} = \\ &= \{Z(T)e^{-T\Lambda} = I\} = Z(t)e^{-t\Lambda} = \Phi(t). \end{aligned}$$

Приводимость. В системе (9) сделаем замену переменных $z = \Phi(t)y$, где y — новая переменная.

Теорема 4. Система (9) в новых переменных y имеет вид

$$\dot{y} = \Lambda y. \quad (11)$$

Доказательство. Равенство (11) следует из (9) и соотношений

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{\Phi}(t)y + \Phi(t)\dot{y} = \dot{Z}(t)e^{-t\Lambda}y + Z(t)e^{-t\Lambda}(-\Lambda)y + \Phi(t)\dot{y} = \\ &= A(t)Z(t)e^{-t\Lambda}y - Z(t)e^{-t\Lambda}\Lambda y + \Phi(t)\dot{y} \\ A(t)z &= A(t)\Phi(t)y = A(t)Z(t)e^{-t\Lambda}y. \end{aligned}$$

Как видим, линейная система с периодическими коэффициентами (9) подходящей заменой переменных приводится к системе (11) с постоянной матрицей.

Собственные значения ρ_i ($i = 1, \dots, n$) матрицы монодромии $B = Z(T)$ называют *мультипликаторами* системы (9). Собственные числа λ_i матрицы Λ — *характеристические показатели* — связаны с мультипликаторами соотношениями

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \ln \rho_i, \quad \rho_i = e^{\lambda_i T}.$$

Критерием асимптотической устойчивости решения $\bar{y} = 0$ системы (11) является условие

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0.$$

В силу равенства

$$|\rho_i| = e^{Re\lambda_i T}$$

это эквивалентно условию

$$|\rho_i| < 1.$$

Полученное неравенство и теорема 4 дают следующий результат.

Теорема 5. *Для асимптотической устойчивости решения $\bar{z} = 0$ системы (9), необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы удовлетворяли неравенствам*

$$|\rho_i| < 1, i = 1, \dots, n.$$

3.3. Экспоненциальная устойчивость цикла

Система первого приближения (8) в общем классе линейных систем с периодическими коэффициентами (9) имеет важную особенность. Действительно, вектор-функция $r(t) = f(\xi(t))$ в силу равенств

$$\dot{r}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t))\dot{\xi}(t)$$

$$\text{и } \dot{\xi}(t) = f(\xi(t))$$

является частным решением системы первого приближения (8). Отсюда, в частности, следует равенство $r(T) = Br(0)$, или, с учетом T -периодичности функции $r(t)$, равенство $r(0) = Br(0)$. Как видим, вектор $r(0)$ является собственным вектором матрицы B с соответствующим собственным значением, равным единице. Таким образом, в случае цикла матрица монодромии B обязательно имеет мультипликатор $\rho_1 = 1$. Полученное означает, что точка покоя $\bar{z} = 0$ системы первого приближения (8) никогда не может быть асимптотически устойчивой. Следует подчеркнуть, что для экспоненциальной устойчивости цикла этого и не требуется. Вопрос об экспоненциальной устойчивости цикла Γ решается в зависимости от расположения остальных мультипликаторов ρ_2, \dots, ρ_n .

Теорема 6 (Андропова — Витта). Для экспоненциальной орбитальной устойчивости решения $\xi(t)$ системы (7) необходимо и достаточно, чтобы мультипликаторы ρ_2, \dots, ρ_n удовлетворяли неравенствам

$$|\rho_i| < 1, i = 2, \dots, n.$$

Доказательство см. в монографии Б. П. Демидовича [1].

Из теоремы Виета и формулы Лиувилля следуют равенства

$$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n = \det B = e^{\int_0^T \text{tr} F(t) dt}.$$

Неравенство

$$\int_0^T \text{tr} F(t) dt < 0 \quad (12)$$

по теореме Андропова — Витта является в общем n -мерном случае необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости цикла Γ .

В двумерном случае справедливо равенство

$$\rho_2 = \det B,$$

что делает неравенство (12) не только необходимым, но одновременно и достаточным условием экспоненциальной устойчивости цикла (критерий Пуанкаре).

В случае цикла на плоскости мультипликатор ρ_2 имеет простой геометрический смысл, показывая при малых отклонениях, во сколько раз траектория приближается к циклу за один оборот. Величина ρ_2 может служить мерой устойчивости предельного цикла к начальным возмущениям. Малость ρ_2 означает высокую степень устойчивости. При значениях $\rho_2 < 1$, но близких к единице, цикл устойчив слабо. При $\rho_2 > 1$ цикл неустойчив. Случай $\rho_2 = 1$ — критический. Здесь возможны различные варианты: цикл устойчив, но не экспоненциально; цикл полуустойчив; цикл находится в окружении других близких циклов и т. д.

4. БИФУРКАЦИИ

В исследовании зависимости фазового портрета системы от изменения входящих в нее параметров выделяют два случая. К первому относят системы, изменение параметров которых в некоторой области сопровождается сохранением качественной картины их фазовых портретов. Два фазовых портрета называют качественно одинаковыми, если существует взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение, переводящее один фазовый портрет в другой. Область параметров, внутри которой сохраняется качественная картина фазовых портретов системы, называется *областью структурной устойчивости*.

Второй случай составляют системы, в которых при прохождении параметра μ через некоторое значение μ_* происходит качественное изменение фазового портрета. При этом говорят, что в системе при $\mu = \mu_*$ происходит *бифуркация*, а само значение μ_* называют *точкой бифуркации*.

Пример

Фазовые портреты линейной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

для различных μ представлены на рис. 6.

Как видим, система имеет две области структурной устойчивости. При $-\infty < \mu < 0$ фазовый портрет — устойчивый узел (рис. 6, а; рис. 6, б).

При $0 < \mu < \infty$ фазовый портрет — седло (рис. 6, в). Эти области разделены единственной точкой бифуркации $\mu_* = 0$ (рис. 6, в).

Переход параметра μ через бифуркационное значение $\mu_* = 0$ слева направо сопровождается потерей устойчивости точки покоя $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0$.

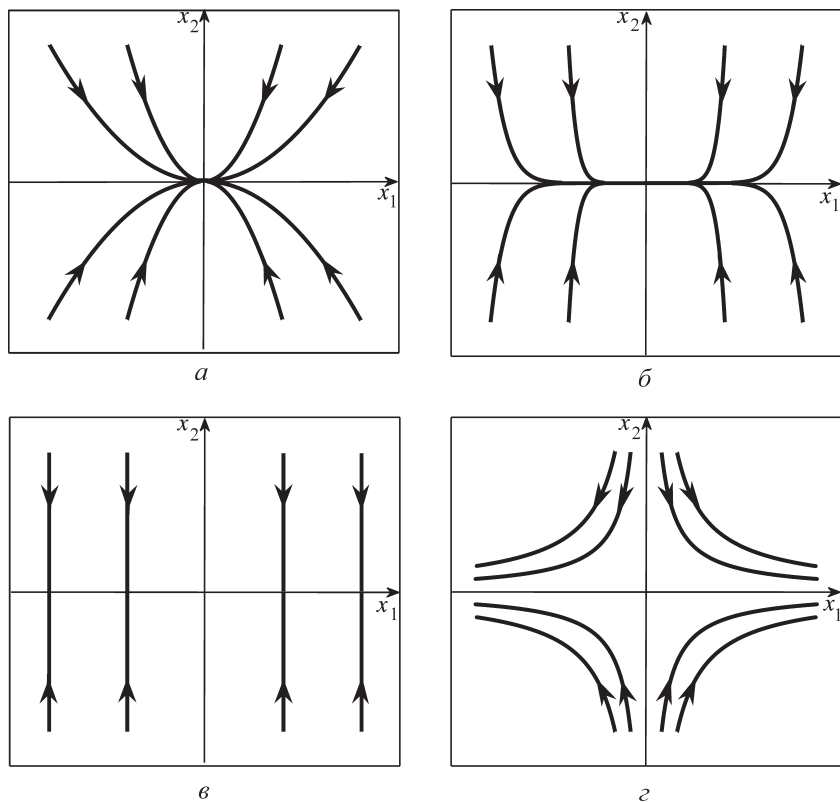


Рис. 6. Фазовые портреты:

a — при $\mu = -0,5$; $б$ — при $\mu = -0,1$; $в$ — при $\mu = 0$; $г$ — при $\mu = 1$

Бифуркация потери устойчивости точки покоя в случае линейных систем обязательно приводит к тому, что фазовые траектории уходят в бесконечность. В нелинейном случае такая бифуркация может сопровождаться появлением у системы новых инвариантных множеств.

Бифуркация рождения цикла

Рассмотрим двумерную систему — модель Хопфа

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases} \quad (13)$$

Перейдя от декартовых координат x_1, x_2 к полярным r, φ по формулам

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi,$$

получим совсем простую систему

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3, \\ \dot{\varphi} = 1, \end{cases} \quad (14)$$

состоящую из двух независимых уравнений. Решением второго уравнения будет функция $\varphi = \varphi_0 + t$, где φ_0 — начальное положение угла φ .

Решения первого уравнения в зависимости от параметра μ имеют следующий вид:

а) при $\mu < 0$ $r_0 = 0$ — единственная точка покоя, к которой экспоненциально стремятся все другие решения при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 7, а);

б) при $\mu = 0$ общая картина предыдущего случая сохраняется, однако скорость стремления решений к $r_0 = 0$ перестает быть экспоненциальной:

$$r(t) = \frac{r(0)}{\sqrt{2t \cdot r^2(0) + 1}}.$$

(Как видим, для всех $\mu \leq 0$ точка покоя $r_0 = 0$ является асимптотически устойчивой.)

в) при $\mu > 0$ у первого уравнения системы (14) наряду с $r_0 = 0$ появляется еще одна точка покоя $r_1 = \sqrt{\mu}$, к которой стремятся экспоненциально другие решения. Расположение интегральных кривых для этого случая представлено на рис. 8, а.

Как видно, при переходе параметра μ через бифуркационное значение $\mu_* = 0$ в область $\mu > 0$ точка покоя $r_0 = 0$ теряет устойчивость. При этом появляется новая устойчивая точка покоя r_1 . Проведенный анализ позволяет теперь проследить изменение фазовых портретов системы (13):

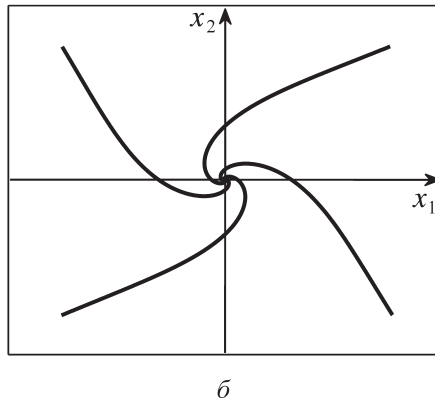
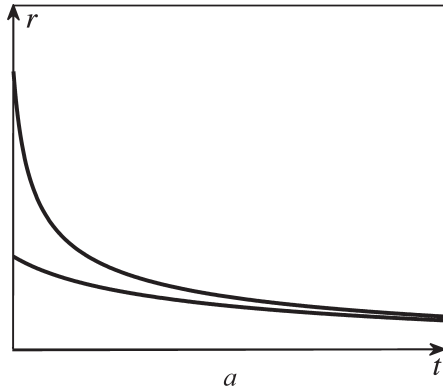


Рис. 7. Динамика систем при $\mu = -1$:

a — система (14); \bar{b} — система (13)

а) при $\mu < 0$ точка покоя $(0, 0)$ системы экспоненциально устойчива. Фазовый портрет — фокус (рис. 7, \bar{b});

б) при $\mu = 0$ точка покоя $(0, 0)$ — асимптотически устойчива;

в) при $\mu > 0$ точка покоя $(0, 0)$ — неустойчива. В системе появляется устойчивый предельный цикл — окружность радиуса $r_1 = \sqrt{\mu}$ (рис. 8, \bar{b}).

Таким образом, переход параметра μ через бифуркационное значение $\mu_* = 0$ сопровождается качественным изменением фазового портрета системы (13). При этом потеря устойчивости точки покоя $(0, 0)$ сопровождается рождением устойчивого предельного цикла — окружности $x_1^2 + x_2^2 = \mu$.

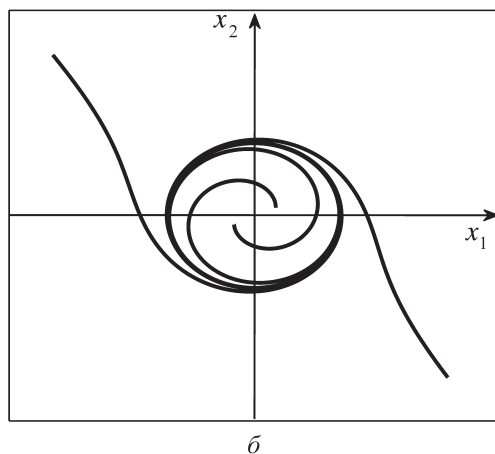
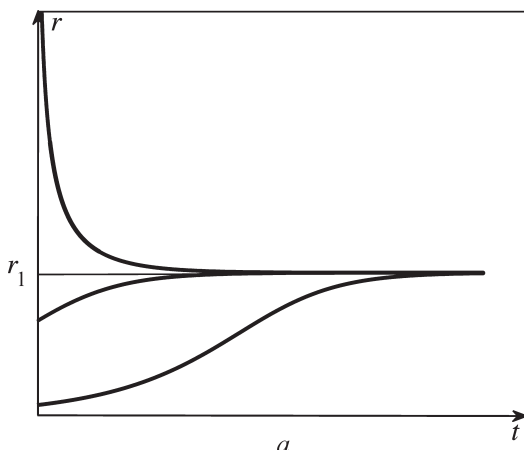


Рис. 8. Динамика систем при $\mu = 0,5$:
a — система (14); *б* — система (13)

Следует отметить, что размер цикла (радиус окружности $r_1 = \sqrt{\mu}$) непрерывно меняется (возрастает) по мере удаления параметра от своего бифуркационного значения $\mu_* = 0$. Такой вариант бифуркации называется *мягким рождением цикла*, или бифуркацией Андронова — Хопфа.

5. СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

Функционирование любой реальной динамической системы, как правило, сопровождается теми или иными случайными возмущениями. Учет случайных флуктуаций приводит к необходимости использовать математический аппарат теории вероятности и теории случайных процессов.

Процесс изучения динамики системы естественно разбить на два этапа. На первом этапе проводят исследования идеальной модели, пренебрегая флуктуациями, а затем на следующем этапе в рассмотрение включают дополнительные эффекты, возникающие при учете случайных флуктуаций, оценивая при этом характер случайных воздействий на характерные режимы динамики. Во многих ситуациях наличие случайных флуктуаций качественно меняет картину.

Под воздействием стохастических возмущений случайные траектории системы покидают аттрактор детерминированной системы и формируют вокруг него некоторый пучок. Благодаря устойчивости аттрактора плотность распределения вероятности случайных состояний в этом пучке стабилизируется. Установившееся стационарное вероятностное распределение определяет соответствующий стохастический аттрактор.

Рассмотрим детерминированную нелинейную систему дифференциальных уравнений

$$dx = f(x)dt, \quad x, f \in \mathbb{R}^n \quad (15)$$

где $f(x)$ — достаточно гладкая вектор-функция.

Пусть система (15) имеет аттрактор $M \subset \mathbb{R}^n$ — инвариантное для (15) ограниченное замкнутое множество.

Предполагается, что M экспоненциально устойчиво. Это означает, что для малой окрестности U множества M найдутся константы $K > 0$, $l > 0$, такие что для любого решения $x(t)$ системы (15)

с начальным условием $x(0) = x_0 \in U$ при всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$\|\Delta(x(t))\| \leq Ke^{-\mu t} \|\Delta(x_0)\|.$$

Здесь

$$\Delta(x) = x - \gamma(x), \quad \gamma(x) = \underset{y \in M}{\operatorname{argmin}} \|x - y\|,$$

$\|\bullet\|$ — евклидова норма, $\gamma(x)$ — ближайшая к x точка аттрактора M , а $\Delta(x)$ — вектор отклонения x от M . Предполагается, что для системы (15) окрестность U инвариантна.

Рассмотрим наряду с (15) соответствующую стохастическую систему уравнений Ито

$$dx = f(x)dt + \varepsilon \sigma(x)dw(t). \quad (16)$$

Здесь $w(t)$ — n -мерный стандартный винеровский процесс, $\sigma(x)$ — достаточно гладкая $n \times n$ -матричная функция, задающая зависимость случайных возмущений от состояния системы, ε — параметр интенсивности возмущений.

Функция $w(t)$ называется n -мерным стандартным винеровским процессом, если ее приращения $\Delta w_i = w(t_{i+1}) - w(t_i)$ для непересекающихся временных отрезков независимы и распределены по нормальному закону

$$E \Delta w_i = 0; \quad E \Delta w_i \Delta w_i^T = |t_{i+1} - t_i| I,$$

где I — единичная $n \times n$ -матрица.

В результате действия невырожденных шумов ($\sigma(x)|_M \neq 0$) случайные траектории системы (16) покидают детерминированный аттрактор M и формируют вокруг него некоторый пучок.

В качестве примера рассмотрим, как реагирует на случайные возмущения модель «хищник — жертва» с насыщением хищника. Детерминированный вариант модели имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{x}{1+x} y - \gamma x^2, \\ \dot{y} = -y + 2 \frac{x}{1+x} y. \end{cases}$$

Рассмотрим, как случайные возмущения воздействуют на нетривиальное равновесие $M_3(1, 2 - 2\gamma)$, которое является устойчивым при $\gamma \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

Внесем в эту систему случайные возмущения. Тогда динамика популяции будет определяться уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{x}{1+x}y - \gamma x^2 + \varepsilon \dot{w}_1, \\ \dot{y} = -y + 2\frac{x}{1+x}y + \varepsilon \dot{w}_2. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь $w_1(t)$, $w_2(t)$ — независимые винеровские процессы.

Для примера возьмем $\gamma = 0,5$, когда $M_3(1, 1)$ — численность хищников и жертв в равновесии одинакова. Благодаря устойчивости равновесия M_3 случайная траектория хоть и покидает его, но продолжает двигаться в некоторой его окрестности, то приближаясь, то удаляясь от равновесия. На рис. 9 изображены стохастические траектории этой системы с начальными условиями $x_0 = 1, y_0 = 1$ для возмущений различной интенсивности.

Рассмотрим далее, как случайные возмущения воздействуют на устойчивый предельный цикл.

Ранее было показано, что при $0 < \gamma < \frac{1}{3}$ точка покоя $M_3(1, 2 - 2\gamma)$ является неустойчивой, траектории уходят от нее, раскручиваясь, и наматываются на предельный цикл. Независимо от выбора начальных соотношений численностей, система двух взаимодействующих популяций переходит в режим колебаний постоянной частоты.

На рис. 10 изображены стохастические траектории этой системы при $\gamma = 0,3$ с начальными данными на предельном цикле для возмущений различной интенсивности.

Благодаря устойчивости предельного цикла случайная траектория хоть и покидает его, но продолжает двигаться в некоторой его окрестности, формируя пучок. Разброс траекторий в этом пучке зависит от интенсивности возмущений. С увеличением интенсивности ε дисперсия увеличивается.

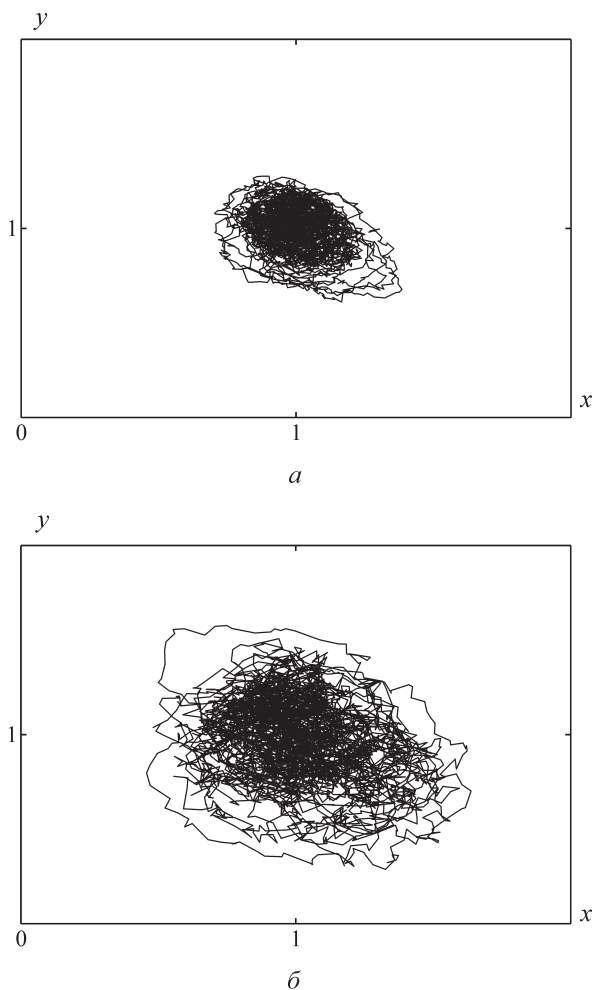


Рис. 9. Динамика решений при: a — $\varepsilon = 0,05$; $б$ — $\varepsilon = 0,1$

Исследование стохастически возмущенных моделей путем прямого численного моделирования случайных траекторий требует значительных компьютерных ресурсов. Получение репрезентативных выборок связано с большими расходами машинного времени.

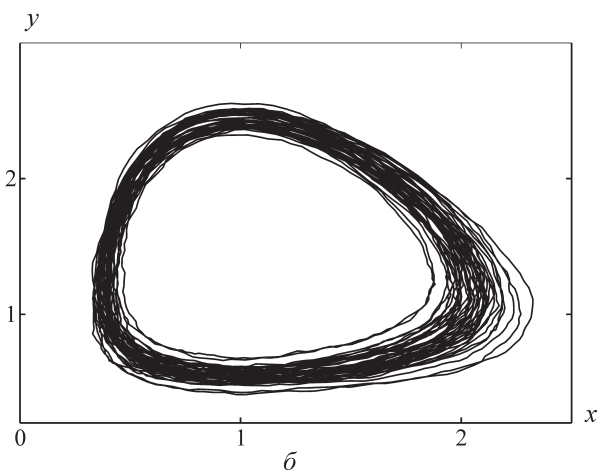
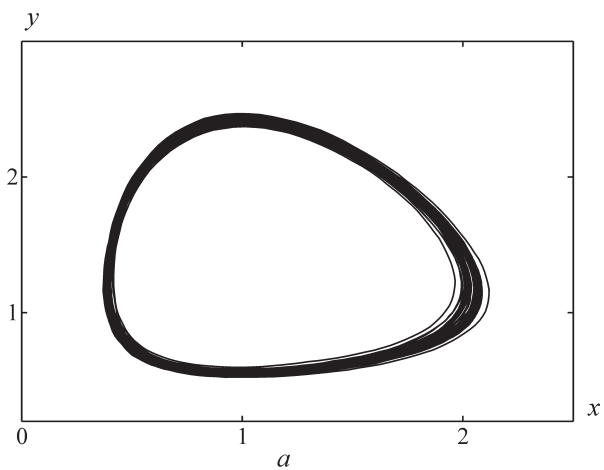


Рис. 10. Динамика решений при: a — $\varepsilon = 0,005$; b — $\varepsilon = 0,02$

Далее рассмотрим аналитические методы изучения вероятностных распределений траекторий в пучке.

6. ТЕОРИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Полное вероятностное описание случайных траекторий в терминах плотности распределения дается уравнением Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК).

Если характер переходного процесса является несущественным, а основной интерес представляет установившийся режим, то можно ограничиться рассмотрением стационарной плотности распределения $\rho(x, \varepsilon)$, задаваемой стационарным уравнением ФПК

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij} \rho) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i \rho) = 0, \quad a_{ij} = [\sigma \sigma^T]_{ij}.$$

Непосредственное использование этого уравнения даже в простейших ситуациях (например, когда рассматривается стационарно-распределенное состояние автоколебательной системы с одной степенью свободы) весьма затруднительно. Важный для практики случай — воздействия малых помех — приводит к известным проблемам анализа уравнений с малыми коэффициентами при старших производных.

Для систем с малыми случайными возмущениями в работе А. Д. Вентцеля и М. И. Фрейдлина предложен подход, использующий некоторую специально конструируемую функцию Ляпунова

$$v(x) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \rho(x, \varepsilon),$$

называемую *квазипотенциалом*. В случае малых шумов с помощью квазипотенциала можно записать асимптотику стационарной плотности

$$\rho(x, \varepsilon) \approx K \cdot \exp \left(-\frac{v(x)}{\varepsilon^2} \right).$$

Квазипотенциал $v(x)$ связан с некоторой вариационной задачей минимизации функционала действия и удовлетворяет уравнению

Гамильтона — Якоби. Уравнение Гамильтона — Якоби выглядит проще, нежели исходное уравнение ФПК, однако и его точное решение является по-прежнему весьма сложной задачей. Здесь возможен конструктивный подход, связанный с введением еще одной асимптотики — малой окрестности исследуемого аттрактора.

6.1. Стохастическое равновесие

В простейшем случае, когда аттрактор M состоит из единственной точки покоя \bar{x} ($M = \{\bar{x}\}$, \bar{x} — экспоненциально устойчива для (15)), для квазипотенциала используется квадратичная аппроксимация $v(x) \approx \frac{1}{2}(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))$ [2]. Эта аппроксимация позволяет представить асимптотику стационарной плотности в форме нормального распределения

$$\rho(x, \varepsilon) \approx K \exp\left(-\frac{(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))}{2\varepsilon^2}\right)$$

с ковариационной матрицей $\varepsilon^2 W$. Эта матрица характеризует разброс случайных траекторий системы (16) вокруг равновесия \bar{x} .

Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ — собственные числа, а h_1, h_2, \dots, h_n — ортонормированный базис собственных векторов матрицы W . При невырожденных шумах все λ_i положительны. При этом собственное число λ_i задает разброс (дисперсию) случайных траекторий в направлении вектора h_i .

Матрица W является решением алгебраического уравнения

$$FW + WF^T = -S, \quad (18)$$

где $F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$, $S = GG^T$, $G = \sigma(\bar{x})$.

В случае экспоненциальной устойчивости точки покоя \bar{x} спектр матрицы F лежит в левой полуплоскости, что гарантирует существование и единственность решения уравнения (18).

Матрица W , связывая интенсивность воздействия ε^2 с ковариацией $\varepsilon^2 W$ разброса случайных траекторий вокруг \bar{x} , играет роль *коэффициента стохастической чувствительности* равновесия \bar{x} .

6.2. Стохастический цикл

Рассмотрим случай, когда аттрактором Γ системы (15) является предельный цикл [3]. Такой цикл может быть задан некоторым T -периодическим решением $x = \xi(t)$, где $x_0 = \xi(0)$ — фиксированная точка цикла. Решение $\xi(t)$ на интервале $[0, T)$ задает естественную параметризацию точек цикла: $\Gamma = \{\xi(t) \mid 0 \leq t < T\}$.

Предполагается, что цикл является экспоненциально устойчивым. В этом случае вокруг цикла формируется стационарно распределенный пучок случайных траекторий системы (16), лежащих в некоторой инвариантной для системы (16) окрестности U .

Пусть Π_t — гиперплоскость, ортогональная циклу в точке $\xi(t)$ ($0 \leq t < T$). Через U_t обозначим окрестность точки $\xi(t)$, лежащую в Π_t : $U_t = U \cap \Pi_t$. Предполагается, что $U_t \cap U_s = \emptyset$ при $t \neq s$. Вероятностное описание случайных траекторий в пучке удобно связать со следующей векторной функцией X_t . Значения X_t есть точки пересечения случайных траекторий нелинейной системы (16) с U_t .

Вероятностное распределение траекторий в пучке с течением времени стабилизируется, поэтому случайная переменная X_t в окрестности U_t имеет некоторое стационарное распределение с плотностью $\rho_t(x, \varepsilon)$. Для малых шумов с помощью соответствующей квадратичной аппроксимации квазитенциала вблизи цикла можно записать экспоненциальную гауссовскую асимптотику

$$\rho_t(x, \varepsilon) = K \exp \left(- \frac{(x - \xi(t))^T W^+(t) (x - \xi(t))}{2\varepsilon^2} \right)$$

со средним значением $m_t = \xi(t)$ и ковариационной матрицей $D(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 W(t)$.

Это распределение, сосредоточенное в гиперплоскости Π_t , является сингулярным $\text{rank} D(t, \varepsilon) \leq n - 1$. Для невырожденных шумов

$$\det \sigma(x) |_{\Gamma} \neq 0$$

имеем $\text{rank} D(t, \varepsilon) = n - 1$. Ковариационная матрица $D(t, \varepsilon)$ характеризует разброс точек пересечения случайных траекторий с гиперплоскостью Π_t .

Рассмотрим собственные значения $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ и собственные векторы h_1, h_2, \dots, h_n матрицы $W(t)$.

В силу вырожденности $W(t)$ собственное значение $\lambda_n(t) \equiv 0$. Остальные собственные значения и соответствующие им собственные векторы характеризуют разброс пучка в гиперплоскости Π_t по величине и направлению. Матрица $W(t)$, играющая роль *функции стохастической чувствительности* цикла, является решением системы

$$\dot{W} = F(t)W + WF^T(t) + P(t)S(t)P(t), \quad (19)$$

$$W(t+T) = W(t)$$

$$W(t)r(t) = 0, \quad r(t) = f(\xi(t)).$$

Здесь

$$F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \quad S(t) = G(t)G^T(t), \quad G(t) = \sigma(\xi(t)),$$

$$P(t) = P_{f(\xi(t))}, \quad P_r = I - \frac{rr^T}{r^T r}.$$

Эта система, благодаря экспоненциальной устойчивости цикла, имеет единственное решение.

6.3. Случай цикла на плоскости

В случае цикла на плоскости матрица $W(t)$, задающая стохастическую чувствительность цикла, и проекционная матрица $P(t)$ имеют ранг, равный единице, и представимы в виде

$$W(t) = m(t)P(t), \quad P(t) = p(t)p^T(t).$$

Здесь $p(t)$ — нормированный вектор, ортогональный касательному вектору $f(\xi(t))$, а следовательно, и циклу Γ в точке $\xi(t)$, а $m(t) > 0$ — T -периодическая скалярная функция, задающая разброс (дисперсию) пучка по нормали $p(t)$ к циклу.

Подставив в дифференциальное уравнение (19) матрицу $W(t) = m(t)P(t)$ и умножив его на $p^T(t)$ слева и на $p(t)$ справа, с учетом

свойств проекционной матрицы ($p^T(t)P(t)p(t) \equiv 1$, $p^T(t)\dot{P}(t)p(t) \equiv 0$), получим для $m(t)$ краевую задачу

$$\dot{m} = a(t)m + b(t), \quad m(0) = m(T) \quad (20)$$

с T -периодическими коэффициентами

$$a(t) = p^T(t)(F^T(t) + F(t))p(t), \quad b(t) = p^T(t)S(t)p(t).$$

Для того чтобы краевая задача (20) имела единственное решение $m(t) > 0$ на $[0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы для коэффициента $a(t)$ выполнялось неравенство

$$\int_0^T a(t)dt < 0.$$

При $n = 2$ ненулевой характеристический показатель λ детерминированной системы

$$dz = F(t)zdt$$

имеет вид

$$\lambda = \frac{1}{2T} \int_0^T a(t)dt.$$

В анализе влияния случайных возмущений на стохастическую динамику системы около предельного цикла важную роль играет величина

$$M = \max_{[0, T]} m(t).$$

Величину M будем называть *коэффициентом чувствительности цикла* Γ к случайным возмущениям. В то время, как функция $m(t)$ дает детальное описание стохастической чувствительности вдоль цикла, коэффициент M является удобной характеристикой цикла в целом.

6.4. Случай цикла в трехмерном пространстве

Будем предполагать, что система (15) имеет экспоненциально устойчивый T -периодический аттрактор — предельный цикл Γ : $x = \xi(t)$ ($0 \leq t \leq T$), $\xi(0) = \xi(T)$.

Матрица $W(t)$ стохастической функции чувствительности для экспоненциально устойчивого предельного цикла является единственным решением системы (19). В трехмерном случае [4] стохастическую чувствительность цикла определяет матричная T -периодическая функция $W(t)$.

Для отыскания матрицы $W(t)$ естественно использовать следующий метод установления.

Метод установления

Рассмотрим решение $V(t)$ задачи Коши

$$\dot{V} = F(t)V + VF^T(t) + P(t)S(t)P(t), \quad V(0) = V_0. \quad (21)$$

Матрица $P(t)V(t)P(t)$ независимо от выбора начальной неотрицательно определенной матрицы V_0 сходится к $W(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (P(t)V(t)P(t) - W(t)) = 0.$$

Скорость сходимости этого метода установления напрямую связана со степенью устойчивости цикла и определяется величиной старшего мультипликатора r : при уменьшении r скорость сходимости увеличивается, при стремлении r к единице скорость сходимости резко падает.

Для отыскания приближенных значений $V_i \approx V(t_i)$ ($t_i = ih$) решения $V(t)$ задачи (21) можно взять за основу один из стандартных одношаговых численных методов:

$$V_{i+1} = F_i(V_i, h). \quad (22)$$

При непосредственном использовании схемы (22) накапливающаяся погрешность ведет к расходимости процесса. Дело в том, что из-за неизбежных локальных ошибок у последовательных приближений V_i появляется компонента, лежащая в неустойчивом

подпространстве. Рост этой компоненты и ведет к расходимости. Чтобы избежать этого, следует модифицировать схему (22) и вести расчет по формуле

$$V_{i+1} = P_{i+1} F_i(V_i, h) P_{i+1}.$$

Такая дополнительная «чистка» приближения проектором $P_{i+1} = P(t_{i+1})$ обеспечивает сходимость метода.

Для отыскания матрицы $W(t)$ также можно использовать метод, учитывающий сингулярное разложение матрицы стохастической чувствительности.

Метод сингулярного разложения

В трехмерном случае у матрицы $W(t)$ собственное значение $\lambda_3 \equiv 0$. Функция стохастической чувствительности цикла для каждой точки t может быть выражена двумя собственными числами $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t)$ и соответствующими собственными векторами $v_1(t)$, $v_2(t)$. Сингулярное разложение матрицы $W(t)$ при $n = 3$ имеет вид:

$$W(t) = \lambda_1(t) v_1(t) v_1^T(t) + \lambda_2(t) v_2(t) v_2^T(t). \quad (23)$$

Для невырожденных шумов функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ являются положительными и задают размер эллипса рассеивания случайных состояний системы в плоскости Π_p , а векторы $v_1(t)$ и $v_2(t)$ определяют направления осей этого эллипса. В плоскости Π_i этот эллипс задается уравнением

$$\frac{\eta_1^2}{\lambda_1} + \frac{\eta_2^2}{\lambda_2} = 2k^2 \varepsilon^2.$$

Здесь $\eta_i = (x - \xi(t), v_i(t))$, $k^2 = -\ln(1 - P)$, а P — доверительная вероятность.

Обозначим через $u_1(t)$, $u_2(t)$ некоторый ортонормальный базис плоскости Π_p , который легко найти, зная T -периодическое решение $\xi(t)$ системы (21). Собственные векторы $v_1(t)$ и $v_2(t)$ могут быть получены поворотом базиса $u_1(t)$, $u_2(t)$ на некоторый угол $\varphi(t)$ (рис. 11):

$$\begin{aligned} v_1(t) &= u_1(t) \cos \varphi(t) + u_2(t) \sin \varphi(t), \\ v_2(t) &= -u_1(t) \sin \varphi(t) + u_2(t) \cos \varphi(t). \end{aligned} \quad (24)$$

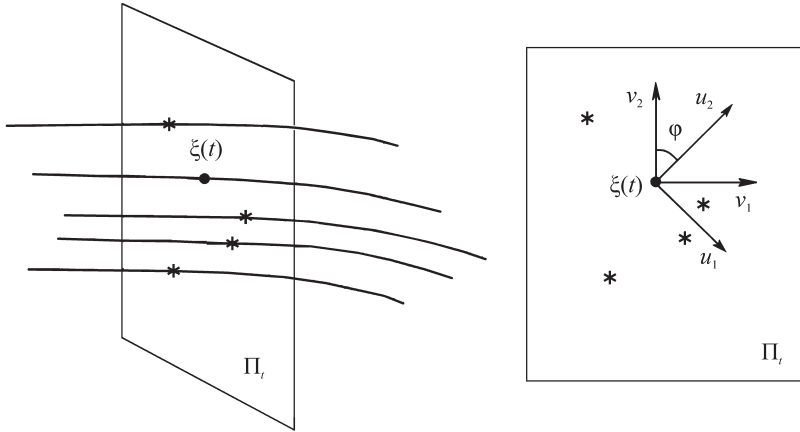


Рис. 11. Точки пересечения (звездочки) пучка случайных траекторий с гиперплоскостью Π_t , ортогональной циклу в точке $\xi(t)$

Таким образом, разложение (23)–(24) позволяет нам выразить неизвестное решение системы (19) через значения трех скалярных функций $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ и $\varphi(t)$.

Перепишем (23) в форме

$$W(t) = \lambda_1(t)P_1(t) + \lambda_2(t)P_2(t), \quad (25)$$

где матрицы

$$P_1(t) = v_1(t)v_1^T(t), \quad P_2(t) = v_2(t)v_2^T(t)$$

являются проекционными:

$$P_i v_i = v_i, \quad P_i v_j = 0 \quad (i \neq j), \quad P = P_1 + P_2.$$

Подставляя разложение (25) в дифференциальное уравнение

$$\dot{W} = F(t)W + WF^T(t) + P(t)S(t)P(t),$$

получаем

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\lambda}_1 P_1 + \lambda_1 \dot{P}_1 + \dot{\lambda}_2 P_2 + \lambda_2 \dot{P}_2 = \\ &= \lambda_1 F P_1 + \lambda_2 F P_2 + \lambda_1 P_1 F^T + \lambda_2 P_2 F^T + (P_1 + P_2)S(P_1 + P_2). \end{aligned}$$

Умножая это соотношение слева на v_i^T и справа на v_j и используя следующие свойства проекционных матриц

$$\begin{aligned} v_1^T(t)\dot{P}_1(t)v_1(t) &\equiv 0, \quad v_1^T(t)\dot{P}_2(t)v_1(t) \equiv 0, \quad v_2^T(t)\dot{P}_1(t)v_2(t) \equiv 0, \\ v_2^T(t)\dot{P}_2(t)v_2(t) &\equiv 0, \quad v_1^T(t)\dot{P}_1(t)v_2(t) = \dot{\phi}(t) + \dot{u}_1^T(t)u_2(t), \\ v_1^T(t)\dot{P}_2(t)v_2(t) &= -\dot{\phi}(t) - \dot{u}_1^T(t)u_2(t), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} v_1^T(t)\dot{P}_1(t)v_1(t) &= \dot{\lambda}_1 = \lambda_1 v_1^T F v_1 + \lambda_1 v_1^T F^T v_1 + v_1^T S v_1 \\ v_2^T(t)\dot{P}_2(t)v_2(t) &= \dot{\lambda}_2 = \lambda_2 v_2^T F v_2 + \lambda_2 v_2^T F^T v_2 + v_2^T S v_2 \\ v_1^T(t)\dot{P}_2(t)v_2(t) &= \lambda_1(\dot{\phi} + \dot{u}_1^T u_2) + \lambda_2(-\dot{\phi} - \dot{u}_1^T u_2) = \\ &= \lambda_2 v_1^T F v_2 + \lambda_1 v_1^T F^T v_2 + v_1^T S v_2. \end{aligned}$$

Таким образом, функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\phi(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \lambda_1 v_1^T [F + F^T] v_1 + v_1^T S v_1 \\ \dot{\lambda}_2 &= \lambda_2 v_2^T [F + F^T] v_2 + v_2^T S v_2 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\dot{\phi} &= \lambda_2 v_1^T F v_2 + \lambda_1 v_1^T F^T v_2 + v_1^T S v_2 - (\lambda_1 - \lambda_2) \dot{u}_1^T u_2. \end{aligned} \tag{26}$$

В невырожденном случае, когда $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, система (26) позволяет однозначно находить параметры $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\phi(t)$ разложения (23)–(24) матрицы $W(t)$, удовлетворяющей системе (19). При этом решение с условием периодичности $W(t+T) = W(t)$ можно получить методом установления, описанным выше.

В случае, когда собственные числа λ_1 , λ_2 равны или близки друг к другу, система (26) имеет особенность. Дело в том, что в случае кратных собственных значений задача отыскания собственных векторов является некорректной. При $\lambda_1(t) = \lambda_2(t)$ соответствующие собственные векторы матрицы $W(t)$ составляют двумерное подпространство: всякий вектор, ортогональный $r(t)$, будет собственным. Формально это означает, что величина угла $\phi(t)$ в разложении (23) может быть любой. При этом отметим, что в случае $\lambda_1 \equiv \lambda_2$ матрица $W(t)$ имеет простое представление $W(t) = \lambda_1(t)P(t)$, и отыскание

собственных векторов не требуется. В этих обстоятельствах на интервалах, где $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ равны или близки друг к другу, можно перейти от системы (26) к системе (19).

Функция стохастической чувствительности, определяемая в точках цикла Γ собственными числами $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$, характеризует на различных участках этого цикла величину разброса пучка случайных траекторий. Она позволяет сравнивать степень чувствительности разных частей цикла к стохастическим помехам и предсказывать тонкие эффекты случайных воздействий.

В анализе чувствительности предельного цикла к случайным возмущениям важную роль играет величина $m = \max_{[0;T]} \lambda_1(t)$, которую мы будем называть показателем стохастической чувствительности цикла. Эта величина является удобной характеристикой чувствительности цикла в целом.

З а м е ч а н и е

Для вычисления правых частей системы (26) нужно знать функции $u_1(t)$, $u_2(t)$ и $\dot{u}_1(t)$. Для их отыскания можно использовать следующий метод.

Перепишем исходную детерминированную систему

$$\dot{x} = f(x)$$

и ее T -периодическое решение $x = \xi(t)$ в координатах

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3), \\ \xi(t) &= (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))^T. \end{aligned}$$

Касательный вектор $r(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))^T$ имеет координаты $f_i(t) = f_i(\xi(t))$, $i = 1, 2, 3$.

Можно выбирать векторы $u_1(t)$, $u_2(t)$ ортонормированного базиса плоскости Π_t в следующей форме

$$u_1 = g_1 \cdot \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = g_2 \cdot \begin{pmatrix} -f_1 f_3 \\ -f_2 f_3 \\ f_1^2 + f_2^2 \end{pmatrix},$$

где

$$g_1 = (f_1^2 + f_2^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad g_2 = \left(f_3^2 (f_1^2 + f_2^2) + (f_1^2 + f_2^2)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

В результате выполняется следующая формула

$$\dot{u}_1 = \dot{g}_1 \cdot \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \\ 0 \end{pmatrix} + g_1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 = & -(f_1^2 + f_2^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(f_1 \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} f_3 \right) + \right. \\ & \left. + f_2 \cdot \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} f_3 \right) \right). \end{aligned}$$

6.5. Доверительные области

Сначала рассмотрим случай, когда детерминированная система имеет устойчивое равновесие \bar{x} . Матрица W стохастической чувствительности характеризует пространственное расположение и размеры стационарно распределенных случайных состояний системы около этого детерминированного равновесия.

Для случая $n = 2$ соответствующий доверительный эллипс задается следующим уравнением [2]:

$$(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x})) = 2k^2\varepsilon^2.$$

где ε — интенсивность возмущений, $k^2 = -\ln(1 - P)$, а P — доверительная вероятность. Это означает, что случайные состояния стохастической системы (16) находятся внутри эллипса с вероятностью P .

Пусть λ_1, λ_2 являются собственными числами, а v_1, v_2 — соответствующими нормализованными (единичными) собственными

векторами матрицы стохастической чувствительности W . Уравнение доверительного эллипса в координатах $z_1 = (x - \bar{x}, v_1)$, $z_2 = (x - \bar{x}, v_2)$ может быть записано в стандартной форме:

$$\frac{z_1^2}{\lambda_1} + \frac{z_2^2}{\lambda_2} = 2k^2\varepsilon^2.$$

Для случая $n = 3$ стохастическая чувствительность этого равновесия задается матрицей стохастической чувствительности W размерности 3×3 . Эта матрица также является решением матричного алгебраического уравнения (18).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — собственные числа, а h_1, h_2, h_3 — базис из ортонормированных собственных векторов матрицы W . Собственные числа λ_i являются удобными скалярными характеристиками разброса случайных состояний $x = (x_1, x_2, x_3)$ вокруг равновесия $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ в направлении h_1 : $E(x - \bar{x}, h_i)^2 \approx \varepsilon^2 \lambda_i$.

Для трехмерной визуализации пространственного расположения случайных состояний вокруг \bar{x} удобно использовать доверительные эллипсоиды. В базисе h_1, h_2, h_3 с началом в точке \bar{x} такой доверительный эллипсоид задается уравнением

$$\frac{\beta_1^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_2^2}{\lambda_2} + \frac{\beta_3^2}{\lambda_3} = 1,$$

где $\beta_i = (x - \bar{x}, h_i)$, а λ_i — собственные числа матрицы стохастической чувствительности W . Координаты β_i эллипсоида имеют простое двухпараметрическое описание

$$\beta_1 = \sqrt{\lambda_1} \sin \varphi \sin \psi, \quad \beta_2 = \sqrt{\lambda_2} \cos \varphi \sin \psi,$$

$$\beta_3 = \sqrt{\lambda_3} \cos \psi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi.$$

Пусть теперь детерминированная система имеет устойчивый цикл Γ .

Функция $m(t)$ стохастической чувствительности позволяет построить доверительную полосу вокруг этого детерминированного цикла. Границы $x_{1,2}(t)$ этой доверительной полосы могут быть записаны в явной параметрической форме [3]:

$$x_{1,2}(t) = \xi(t) \pm k\varepsilon \sqrt{2m(t)p(t)}, \quad t \in [0, T].$$

Здесь параметр k связан с доверительной вероятностью P формулой $k = \text{erf}^{-1}(P)$, где $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Случайные траектории стохастической системы (16) окружены границами доверительной полосы с доверительной вероятностью P .

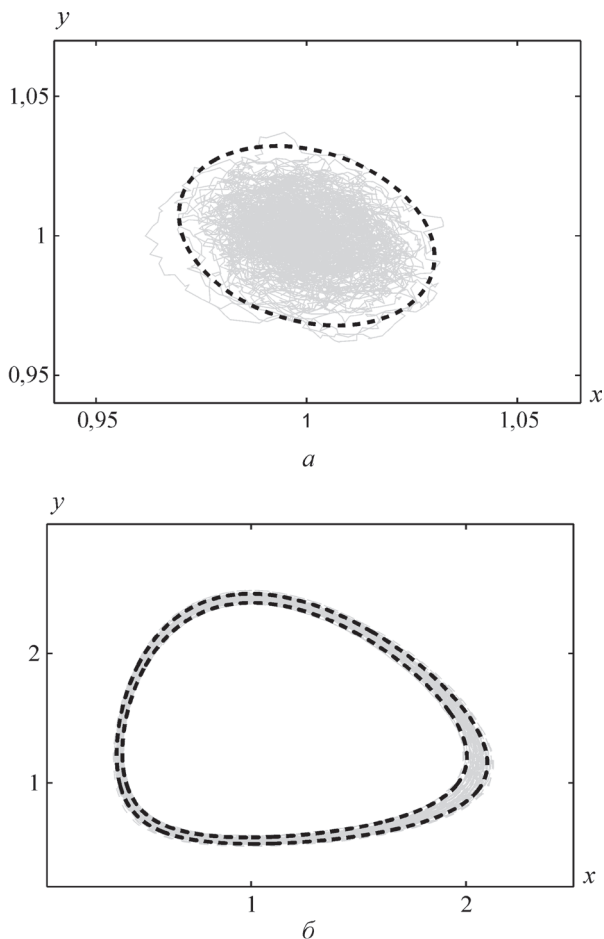


Рис. 12. Доверительные области для аттракторов системы (17) при $\varepsilon = 0,005$: эллипс для $\gamma = 0,5$ и полоса для $\gamma = 0,3$. Серым цветом изображены случайные траектории системы

На рис. 12 серым цветом построены случайные траектории системы вокруг устойчивого равновесия (рис. 12, *а*) и вокруг устойчивого цикла (рис. 12, *б*). Черным пунктиром здесь изображены границы доверительных областей — доверительного эллипса и доверительной полосы.

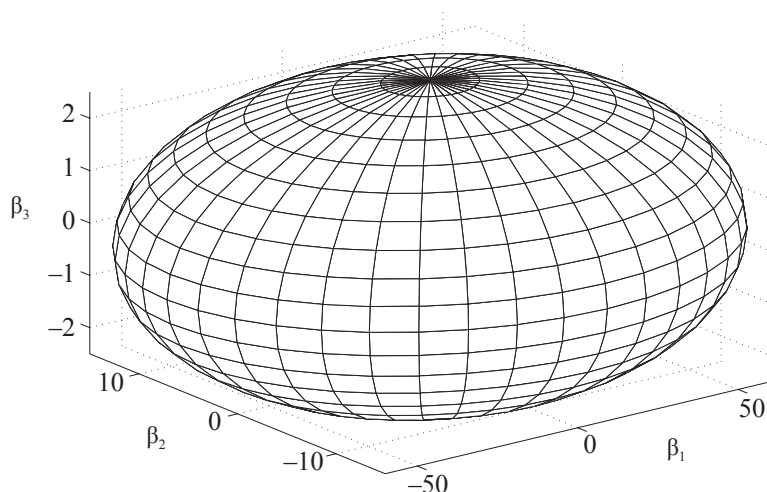


Рис. 13. Доверительный эллипсоид

На рис. 13 приведен пример доверительного эллипсоида. Как видим, доверительные области, полученные с помощью метода функции стохастической чувствительности, хорошо согласуются с результатами прямого численного моделирования.

Таким образом, доверительные области являются достаточно простыми и наглядными геометрическими моделями пространственного описания случайных состояний в стохастическом равновесии и цикле.

Пример 1. Стохастическая модель «хищник — жертва с насыщением хищника»

В качестве примера проведем анализ стохастической чувствительности предельных циклов модели «хищник — жертва с насыщением хищника».

На рис. 14 изображены предельные циклы этой модели для разных значений параметра γ .

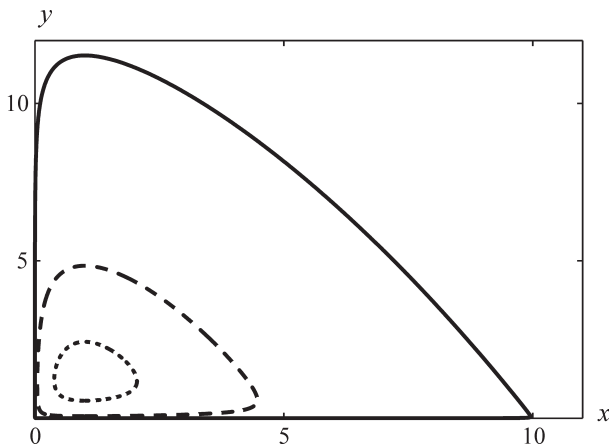


Рис. 14. Циклы системы для $\gamma = 0,3$ (точки); $\gamma = 0,2$ (пунктир); $\gamma = 0,3$; $\gamma = 0,1$ (сплошная)

Для каждого из рассмотренных значений параметра построим график функции стохастической чувствительности цикла (рис. 15).

Как видим, стохастическая чувствительность циклов в диапазоне $0 < \gamma < \frac{1}{3}$ весьма неоднородна как по времени, так и по параметру. При уменьшении γ наблюдается резкое увеличение стохастической чувствительности, что может привести даже при малых случайных возмущениях к качественному изменению динамики.

Пример 2. Стохастическая система Хопфа

Классической моделью, иллюстрирующей бифуркацию перехода от равновесия к предельному циклу, является система Хопфа. Рассмотрим систему Хопфа в присутствии случайных возмущений

$$\dot{x} = (\mu x - y - (x^2 + y^2)x) + \varepsilon \dot{w}_1(t),$$

$$\dot{y} = (x + \mu y - (x^2 + y^2)y) + \varepsilon \dot{w}_2(t).$$

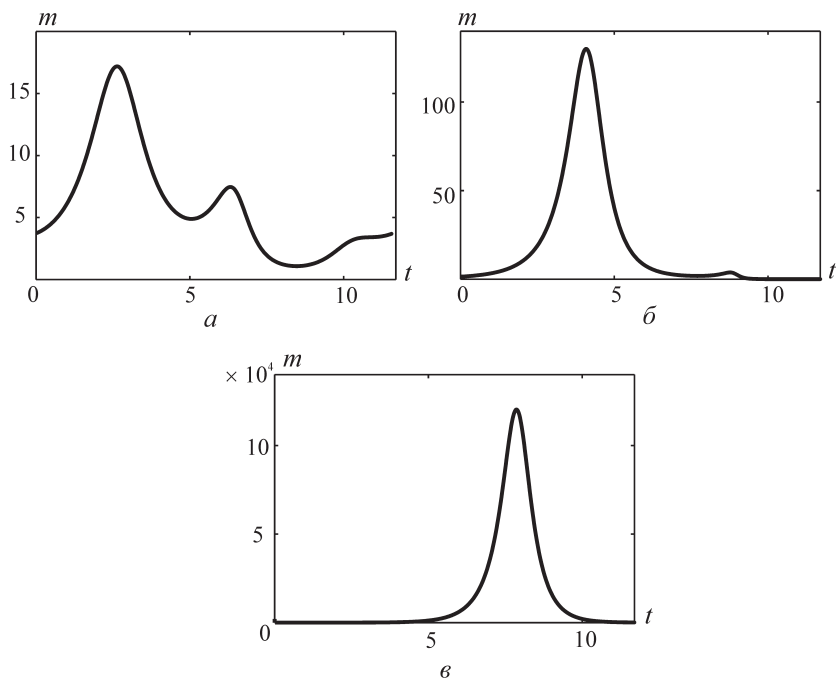


Рис. 15. Стохастическая чувствительность цикла для:

$a — \gamma = 0,3$; $б — \gamma = 0,2$; $в — \gamma = 0,1$

Здесь w_1, w_2 — независимые стандартные винеровские процессы, а ε — интенсивность случайных помех. В детерминированной системе Хопфа ($\varepsilon = 0$) при переходе параметра μ через бифуркационное значение $\mu_* = 0$ точка равновесия $(0, 0)$ теряет устойчивость и в системе рождается предельный цикл — окружность $x^2 + y^2 = \mu$. Под действием случайных возмущений ($\varepsilon \neq 0$) траектория покидает детерминированный аттрактор и формирует вокруг него некоторый пучок.

На рис. 16 для различных значений μ изображены состояния этой системы, полученные прямым численным моделированием.

Математической моделью соответствующего стохастического аттрактора является стационарное распределение вероятности, к которому сходятся все другие распределения. Для системы Хопфа

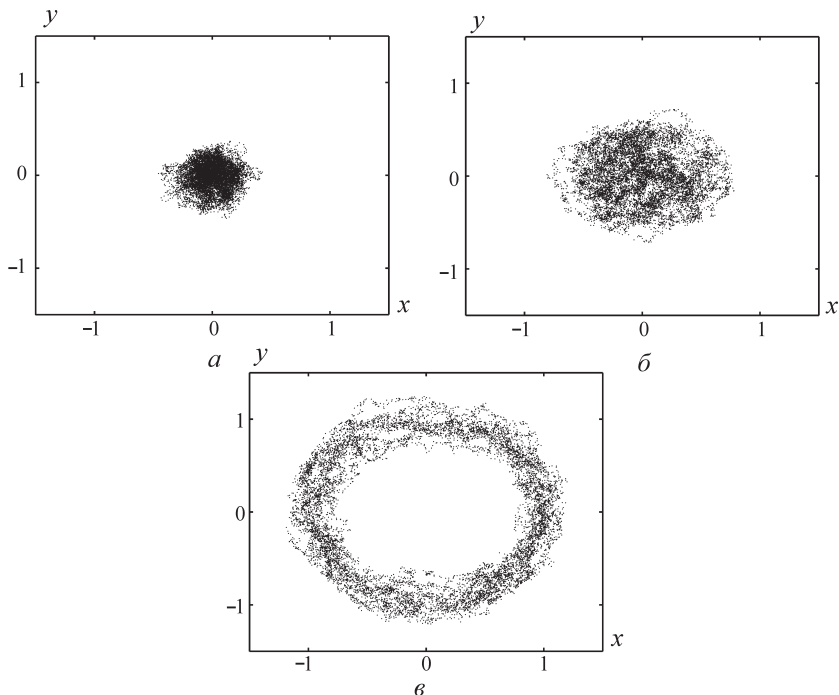


Рис. 16. Случайные состояния системы Хопфа для:
 $a — \mu = -1$; $b — \mu = 0$; $в — \mu = 1$

уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова для стационарной плотности распределения $\rho(x, y)$ имеет вид

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} ((\mu x - y - (x^2 + y^2)x)\rho) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} ((x + \mu y - (x^2 + y^2)y)\rho) = 0.$$

Решение этого уравнения находится аналитически

$$\rho(x, y) = K \exp \left(\frac{2\mu(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2}{2\varepsilon^2} \right)$$

с константой нормировки $K = K(\mu, \varepsilon) > 0$.

При $\mu \leq 0$ функция $\rho(x, y)$ имеет единственный максимум в точке $(0, 0)$. Случайные траектории системы Хопфа концентрируются в окрестности точки $(0, 0)$.

При $\mu > 0$ максимумы функции $\rho(x, y)$ располагаются на детерминированном цикле $x^2 + y^2 = \mu$, а единственный минимум лежит в точке $(0, 0)$. Таким образом, при переходе параметра μ через бифуркационное значение $\mu_* = 0$ происходит качественное изменение стационарной плотности распределения (рис. 17, 18).

Разброс случайных траекторий как вокруг точки покоя, так и вокруг цикла удобно описывать с помощью функции стохастической чувствительности.

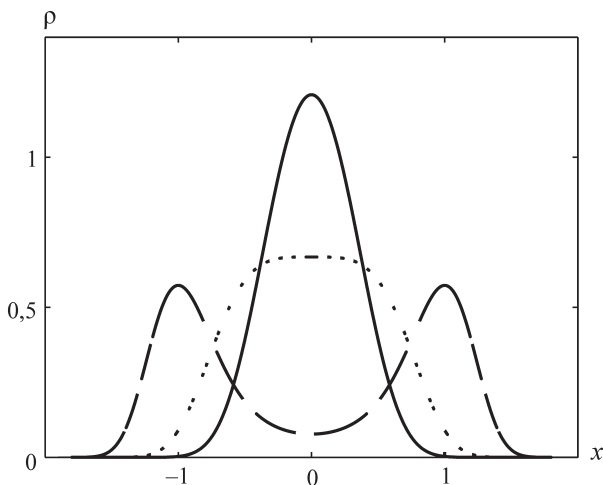


Рис. 17. Графики функции $\rho(x, 0)$ для $\mu = -1$ (сплошная); $\mu = 0$ (точки); $\mu = 1$ (пунктир)

Для точки покоя $(0, 0)$ системы Хопфа при $\mu < 0$ матрица стохастической чувствительности $W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$ является решением уравнения (18) и имеет элементы

$$w_{11} = w_{22} = -\frac{1}{2\mu}, \quad w_{12} = w_{21} = 0.$$

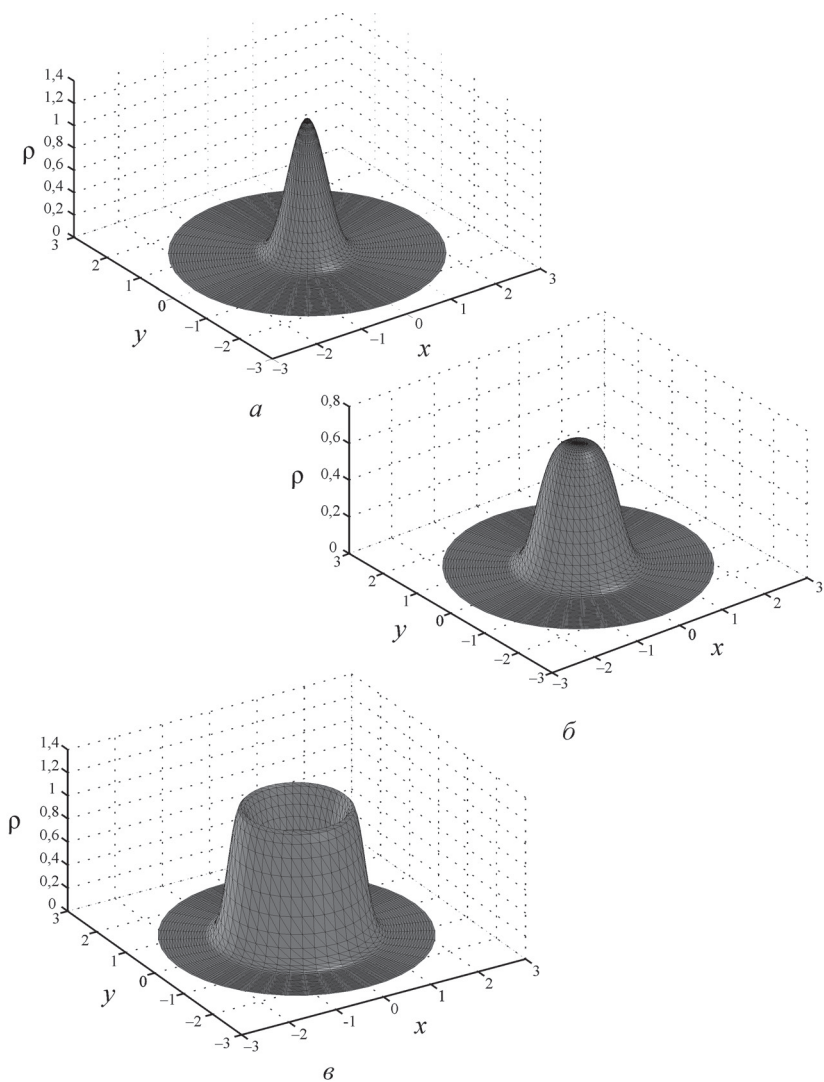


Рис. 18. Функции плотности распределения системы Хопфа для:
a — $\mu = -1$; *б* — $\mu = 0$; *в* — $\mu = 1$

Как видим, при любом $\delta < 0$ ковариационная матрица стационарного распределения диагональна. Равенство нулю недиагональных элементов ($w_{21} = w_{12} = 0$) матрицы чувствительности означает, что координаты случайных отклонений от равновесия в направлении осей координат не коррелируют друг с другом. Совпадение диагональных элементов ($w_{22} = w_{11}$) означает, что разброс случайных траекторий вокруг точки покоя по всем направлениям одинаков. Эллипсом рассеивания является окружность. Функция стохастической чувствительности $m(\mu) = w_{11}(\mu) = w_{22}(\mu) = -\frac{1}{2\mu}$ монотонно возрастает и при приближении μ к бифуркационному значению $\mu_* = 0$ стремится к бесконечности.

Разброс случайных траекторий системы вдоль оси OX для параметра нелинейности $\mu < 0$ и помех интенсивности ε задается дисперсией $D(\mu, \varepsilon)$. Функция $m(\mu, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} D(\mu, \varepsilon)$ характеризует чувствительность точки покоя для шума фиксированной интенсивности ε . При этом $m(\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m(\mu, \varepsilon)$.

На рис. 19 при $\mu < 0$ изображен график $m(\mu)$ (сплошная линия) и графики $m(\mu, \varepsilon)$ для различных значений интенсивности шума ε ($\varepsilon = 0,5$ — пунктир, $\varepsilon = 0,2$ — штрих-пунктир, $\varepsilon = 0,005$ — точки). Как видно, с уменьшением параметра ε графики $m(\mu, \varepsilon)$ достаточно быстро стремятся к $m(\mu)$.

Таким образом, функция стохастической чувствительности $m(\mu)$ является простой и в то же время достаточно точной характеристикой разброса случайных траекторий вокруг точки покоя.

Для предельных циклов системы Хопфа при $\mu > 0$ функция стохастической чувствительности $m(t, \mu)$ — решение задачи (20) — не зависит от параметра t : $m(\mu, t) = m(\mu) = -\frac{1}{4\mu}$. Это значит, что разброс случайных траекторий вдоль цикла однороден. При этом соответствующая дисперсия $D(\mu, \varepsilon, t)$ также не меняется вдоль цикла $D(\mu, \varepsilon, t) = D(\mu, \varepsilon)$.

На рис. 19 при $\mu > 0$ изображены графики функции стохастической чувствительности цикла $m(\mu)$ (сплошная линия) и графики

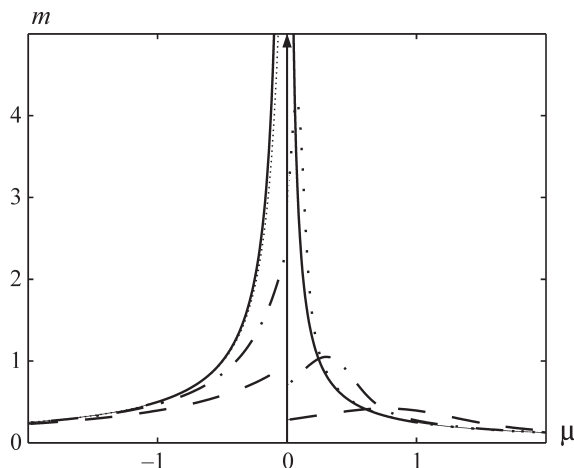


Рис. 19. Стохастическая чувствительность аттракторов системы Хопфа

функции $m(\mu, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} D(\mu, \varepsilon)$ для различных значений интенсивности шума ε ($\varepsilon = 0,5$ — пунктир, $\varepsilon = 0,2$ — штрих-пунктир, $\varepsilon = 0,005$ — точки). Как видно, и в случае цикла функция стохастической чувствительности $m(\mu)$ достаточно хорошо отражает изменение разброса случайных траекторий случайного аттрактора при изменении параметра μ . Главной чертой здесь является неограниченный рост стохастической чувствительности при стремлении параметра μ к бифуркационному значению $\mu_* = 0$.

Пример 3. Стохастическая модель Лоренца

В качестве примера рассмотрим классическую модель Лоренца [5]. Эта трехмерная система демонстрирует большое разнообразие качественно различных динамических режимов, в том числе сосуществование периодических аттракторов и переход к хаосу через удвоение периода [6]. Детерминированная система Лоренца имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(-x + y), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \quad \sigma = 10, \quad b = \frac{8}{3}. \quad (27)$$

Рассмотрим динамику этой системы на интервале $200 < r < 350$. Этот интервал хорошо известен [6] как зона бифуркаций удвоения периода и перехода к хаосу. При уменьшении параметра r от 350 до 200 наблюдается следующий сценарий изменения динамики системы.

При $313 < r < 350$ в системе Лоренца наблюдается одна симметричная устойчивая периодическая орбита — предельный цикл. Проекция предельного цикла системы (27) с $r = 330$ изображена на рис. 20, *а*.

При уменьшении параметра r в системе (27) симметричный предельный цикл расщепляется, и появляются два сосуществующих несимметричных предельных цикла (рис. 20, *б* для $r = 300$). Эти два несимметричных предельных цикла наблюдаются в системе между $r = 313$ и $r = 230$.

При дальнейшем уменьшении параметра r система (27) демонстрирует цепь бифуркаций удвоения периода. Каждый из этих двух циклов проходит серию преобразований: цикл — 2-цикл — 4-цикл — ... — 2^k -цикл — 2^{k+1} -цикл — На рис. 20, *в*, *г* изображены два отдельных 2-цикла и 4-цикла.

Дальнейшее уменьшение параметра r приводит к переходу от этих двух регулярных периодических аттракторов к двум несимметричным хаотическим аттракторам. Когда эти два хаотических аттрактора сближаются, расстояние между ними уменьшается, и в системе можно наблюдать слияние этих отдельных несимметричных хаотических аттракторов в единый симметричный хаотический аттрактор (рис. 20, *д* для $r = 200$).

Таким образом, этот сценарий начинается с разрушения симметрии и заканчивается симметризацией.

Изменение аттракторов детерминированной модели Лоренца можно наглядно проиллюстрировать с помощью бифуркационной диаграммы. На рис. 21 построена бифуркационная диаграмма модели Лоренца на интервале $r \in [200, 330]$. Здесь изображены x -координаты точек пересечения аттракторов с полуплоскостью $y = 0, x \geq 0$.

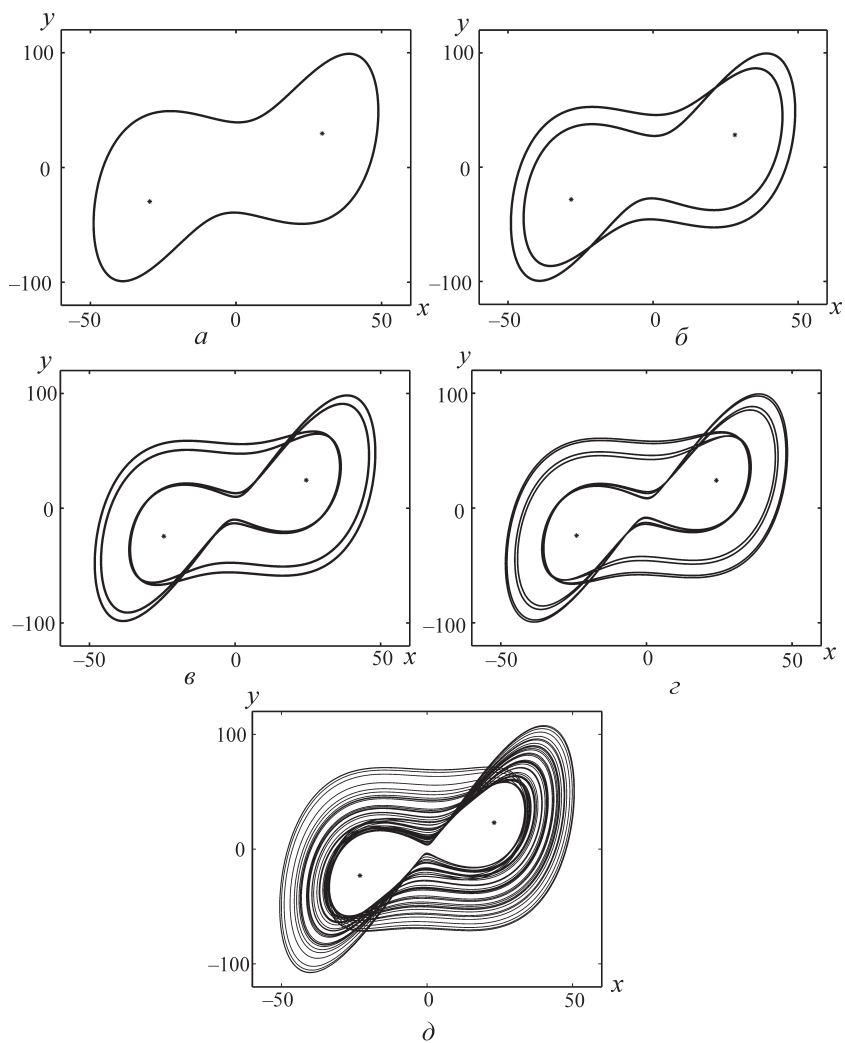


Рис. 20. Аттракторы детерминированной модели Лоренца при:
 a — $r = 330$; \bar{b} — $r = 300$; \bar{c} — $r = 225$; \bar{z} — $r = 217$; \bar{d} — $r = 200$

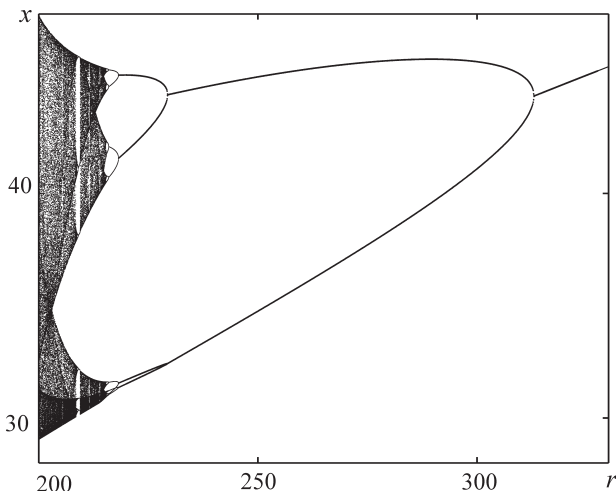


Рис. 21. Бифуркационная диаграмма детерминированной модели Лоренца

Далее рассмотрим систему Лоренца, находящуюся под воздействием случайных возмущений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(-x + y) + \varepsilon \dot{w} , \\ \dot{y} = rx - y - xz + \varepsilon \dot{w} , \\ \dot{z} = -bz + xy + \varepsilon \dot{w} . \end{cases} \quad (28)$$

Здесь $w_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) — независимые стандартные винеровские процессы с параметрами $E(w_i(t) - w_i(s)) = 0$, $E(w_i(t) - w_i(s))^2 = |t - s|$. Параметр ε является величиной интенсивности шума.

Воздействие шума приводит к стохастической деформации детерминированных аттракторов модели Лоренца. При случайных возмущениях траектории стохастической системы покидают детерминированный аттрактор и образуют вокруг него некоторый пучок с соответствующим вероятностным распределением.

Дисперсия случайных состояний вблизи детерминированной аттрактора зависит от интенсивности шума и устойчивости локальных частей аттрактора. На рис. 22 изображен пучок случайных

траекторий вокруг устойчивого предельного цикла системы Лоренца для $r = 330$ и интенсивности шума $\varepsilon = 1$. Как видно, случайные траектории распределены вокруг детерминированного цикла неравномерно.

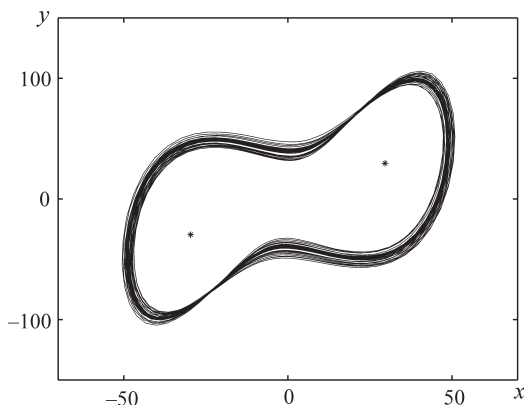


Рис. 22. Случайные траектории системы Лоренца для $r = 330$ и $\varepsilon = 1$

Воздействие даже малого шума приводит к размыванию тонкой структуры детерминированных аттракторов. Этот эффект можно наблюдать на стохастической бифуркационной диаграмме. На рис. 23 построены две бифуркационные диаграммы системы Лоренца для двух значений интенсивности шума $\varepsilon = 0,1$ и $\varepsilon = 1$.

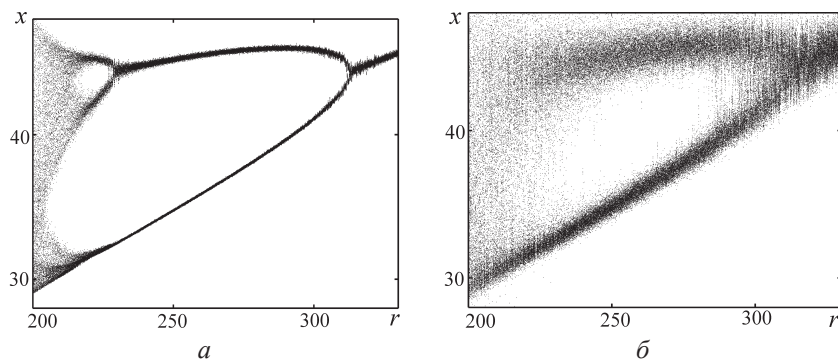


Рис. 23. Бифуркационная диаграмма стохастической системы Лоренца для: $a — \varepsilon = 0,1$; $b — \varepsilon = 1$

Для анализа воздействия шума на предельные циклы модели Лоренца применим технику функции стохастической чувствительности. Собственные числа $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ ($\lambda_1(t) > \lambda_2(t)$) матричной функции стохастической чувствительности являются удобными скалярными характеристиками чувствительности предельного цикла к шуму.

Для стохастического цикла модели Лоренца с параметром $r = 330$ графики функций $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ показаны сплошными линиями на рис. 24. Здесь же отмечены звездочками результаты прямого численного моделирования $\lambda_1^*(t)$, $\lambda_2^*(t)$ для $\varepsilon = 0,01$. Напомним, что функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, полученные с помощью техники функций стохастической чувствительности, связаны с $\lambda_1^*(t)$, $\lambda_2^*(t)$ соотношением:

$$\lambda_i(t) \approx \frac{\lambda_i^*(t)}{\varepsilon^2}.$$

Можно видеть, что теоретические кривые $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ расположены вблизи значений эмпирической функции чувствительности и четко отражают основные черты этой функции (острые пики, интервалы монотонности).

На рис. 24 также отчетливо видны особенности поведения пучка случайных траекторий вдоль цикла, такие как неравномерность ширины пучка вдоль цикла и большой перепад дисперсии в нормальном направлении.

Графики функций $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ для стохастически возмущенного 2-цикла системы (28) для $r = 225$ показаны на рис. 25. Как можно видеть, 2-цикл более чувствителен к шуму. Об этом сигнализируют большие значения функции стохастической чувствительности.

Отношение между поведением собственных чисел λ_1 и λ_2 во времени и пространственными особенностями случайных траекторий в пучке вокруг цикла модели Лоренца можно проиллюстрировать, сравнивая рис. 22 и 24. Действительно, экстремумы функций λ_1 и λ_2 обозначают соответствующие пространственные зоны стохастического цикла, где дисперсия разброса случайных траекторий имеет максимумы и минимумы.

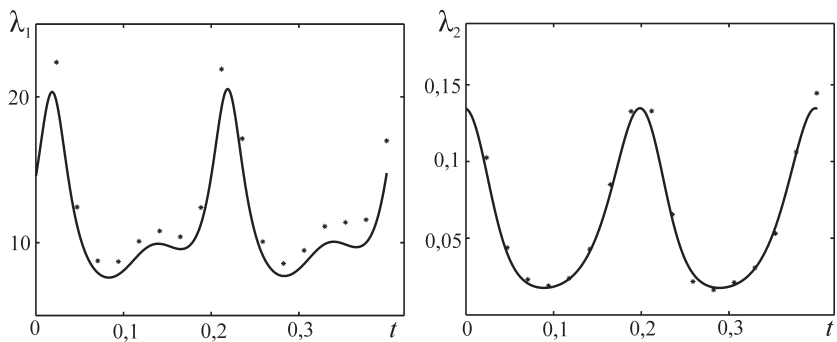


Рис. 24. Функции стохастической чувствительности цикла системы Лоренца для $r = 330$ и $\varepsilon = 0,01$

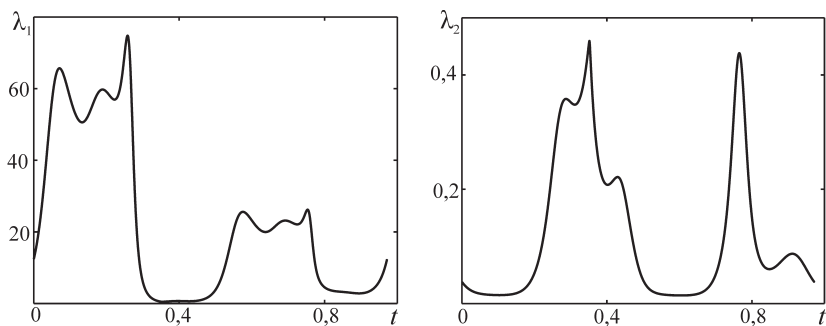


Рис. 25. Функции стохастической чувствительности 2-цикла системы Лоренца для $r = 225$

7. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Рассмотрим основные конструкции и подходы к построению численных методов решения дифференциальных уравнений. Основной идеей является дискретизация рассматриваемых интервалов и функций.

Для дискретизации временного отрезка $[t_0, t_0 + T]$ разобьем его на N частей узлами $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$ с шагом $h = \frac{T}{N} : t_{m+1} = t_m + h$. Пусть $x(t)$ — решение задачи Коши для дифференциального уравнения с начальным условием

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Для дискретизации функций обозначим через x_m приближенное значение для неизвестного точного решения $x(t_m)$ в момент t_m . Для расчета x_m используют различные методы.

Метод Эйлера

Расчет приближенных значений ведется по формуле

$$x_{m+1} = x_m + hf(x_m, y_m).$$

Получаемые приближения имеют погрешности первого порядка:

$$\|x(t_m) - x_m\| = O(h).$$

Метод Эйлера с пересчетом

Расчет приближенных значений ведется по формуле

$$x_{m+1} = x_m + \frac{h}{2} (f(t_m, x_m) + f(t_m + h, x_m + hf(t_m, x_m))).$$

Получаемые приближения имеют погрешности второго порядка:

$$\|x(t_m) - x_m\| = O(h^2).$$

Метод Коши

Расчет приближенных значений ведется по формуле

$$x_{m+1} = x_m + hf\left(t_m + \frac{h}{2}, x_m + \frac{h}{2}f(t_m, x_m)\right).$$

Получаемые приближения имеют погрешности второго порядка:

$$\|x(t_m) - x_m\| = O(h^2).$$

Метод Рунге — Кутта четвертого порядка

Расчет приближенных значений ведется по формулам:

$$x_{m+1} = x_m + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4);$$

$$K_1 = hf(t_m, x_m), \quad K_2 = hf\left(t_m + \frac{h}{2}, x_m + \frac{K_1}{2}\right),$$

$$K_3 = hf\left(t_m + \frac{h}{2}, x_m + \frac{K_2}{2}\right), \quad K_4 = hf(t_m + h, x_m + K_3).$$

Получаемые по методу Рунге — Кутта приближения имеют погрешности четвертого порядка

$$\|x(t_m) - x_m\| = O(h^4).$$

7.1. Численные методы решения систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0$$

$$y(0) = y_0.$$

Пусть пара функций $x(t)$, $y(t)$ является решением этой задачи Коши. Для дискретизации временного отрезка $[t_0, t_0 + T]$ разобьем его на N частей узлами $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$ с шагом $h = \frac{T}{N}$: $t_{m+1} = t_m + h$.

Для дискретизации функций обозначим через x_m, y_m приближенное значение для неизвестного точного решения $x(t_m), y(t_m)$ в момент t_m . Для расчета x_m, y_m используют различные методы.

Метод Эйлера

Расчет приближенных значений ведется по формулам

$$\begin{aligned}x_{m+1} &= x_m + hf(x_m, y_m) \\y_{m+1} &= y_m + hg(x_m, y_m).\end{aligned}$$

Получаемые приближения имеют погрешности порядка $O(h)$.

Метод Эйлера с пересчетом

Расчет приближенных значений ведется по формулам

$$\begin{aligned}x_{m+1} &= x_m + \frac{h}{2}(f(x_m, y_m) + f(x_m + hf(x_m, y_m), y_m + hg(x_m, y_m))) \\y_{m+1} &= y_m + \frac{h}{2}(g(x_m, y_m) + g(x_m + hf(x_m, y_m), y_m + hg(x_m, y_m))).\end{aligned}$$

Получаемые приближения имеют погрешности порядка $O(h^2)$.

Метод Коши

Расчет приближенных значений ведется по формулам

$$\begin{aligned}x_{m+1} &= x_m + hf\left(x_m + \frac{h}{2}f(x_m, y_m), y_m + \frac{h}{2}g(x_m, y_m)\right) \\y_{m+1} &= y_m + hg\left(x_m + \frac{h}{2}f(x_m, y_m), y_m + \frac{h}{2}g(x_m, y_m)\right).\end{aligned}$$

Получаемые приближения имеют погрешности порядка $O(h^2)$.

Метод Рунге — Кутта четвертого порядка

Расчет приближенных значений ведется по формулам:

$$x_{m+1} = x_m + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$\begin{aligned}
y_{m+1} &= y_m + \frac{1}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) \\
K_1 &= hf(x_m, y_m), \quad L_1 = hg(x_m, y_m) \\
K_2 &= hf\left(x_m + \frac{K_1}{2}, y_m + \frac{L_1}{2}\right), \quad L_2 = hg\left(x_m + \frac{K_1}{2}, y_m + \frac{L_1}{2}\right), \\
K_3 &= hf\left(x_m + \frac{K_2}{2}, y_m + \frac{L_2}{2}\right), \quad L_3 = hg\left(x_m + \frac{K_2}{2}, y_m + \frac{L_2}{2}\right), \\
K_4 &= hf(x_m + K_3, y_m + L_3), \quad L_4 = hg(x_m + K_3, y_m + L_3).
\end{aligned}$$

Получаемые по методу Рунге — Кутты приближения имеют погрешности $O(h^4)$.

7.2. Компьютерное моделирование стохастических траекторий

Рассмотрим систему со случайными возмущениями

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) + \sigma_1(x, y)\dot{w}_1, \\ \dot{y} = g(x, y) + \sigma_2(x, y)\dot{w}_2. \end{cases}$$

Здесь $w_1(t)$, $w_2(t)$ — независимые винеровские процессы.

Расчет приближенных значений на основе метода Эйлера ведется по формулам

$$x_{m+1} = x_m + hf(x_m, y_m) + \sigma_1(x_m, y_m)\Delta w_{1,m}$$

$$y_{m+1} = y_m + hg(x_m, y_m) + \sigma_2(x_m, y_m)\Delta w_{2,m},$$

где $\Delta w_{1,m}$, $\Delta w_{2,m}$ — приращения винеровских процессов — можно получить по формулам

$$\Delta w_{1,m} = \sqrt{-2h \ln(r_{1,m})} \sin(2\pi r_{2,m})$$

$$\Delta w_{2,m} = \sqrt{-2h \ln(r_{1,m})} \cos(2\pi r_{2,m}).$$

Здесь $r_{1,m}$, $r_{2,m}$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$.

7.3. Основные алгоритмы

Алгоритм 1. Построение предельного цикла

Идея метода заключается в нахождении набора точек (x, y) , задающих периодическое решение за один период времени T . Для построения потребуется использовать сечение, которое удобно выбирать используя координаты равновесия (\bar{x}, \bar{y}) .

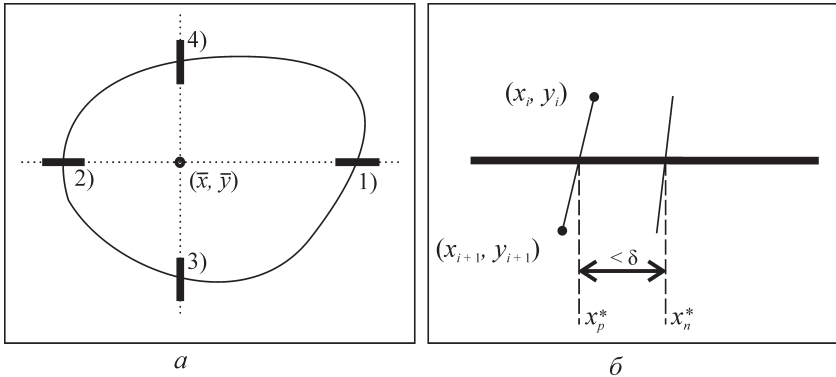


Рис. 26. Построение предельного цикла с заданной точностью δ :

a — сечение Пуанкаре; b — достижение точности

На рис. 26, a представлены четыре сечения:

1) ординаты точек равны ординате равновесия $y = \bar{y}$ и абсциссы удовлетворяют условию $x > \bar{x}$;

2) ординаты точек равны ординате равновесия $y = \bar{y}$ и абсциссы удовлетворяют условию $x < \bar{x}$;

3) абсциссы точек равны абсциссе равновесия $x = \bar{x}$ и ординаты удовлетворяют условию $y < \bar{y}$;

4) абсциссы точек равны абсциссе равновесия $x = \bar{x}$ и ординаты удовлетворяют условию $y > \bar{y}$.

Выбор сечения зависит от формы предельного цикла конкретной модели.

На входе алгоритма:

(x_0, y_0) — начальная точка численного метода,

δ — точность нахождения цикла.

На выходе:

$[x_1, x_2, \dots, x_k], [y_1, y_2, \dots, y_k]$ — массивы координат точек цикла.

1. Запускаем с точки (x_0, y_0) метод построения фазовой траектории до тех пор, пока не пересечем выбранное сечение первый раз.

Пример условия пересечения сечения:

$$x_i > \bar{x} \ \& \ x_{i+1} > \bar{x} \ \& \ (y_i - \bar{y}) (y_{i+1} - \bar{y}) < 0$$

(условие записано для сечения 1 рис. 26).

2. Вычисляем и запоминаем абсциссу точки пересечения нашей траектории с сечением.

Пример вычисления координаты:

$$x_p^* = x_i + \frac{(\bar{y} - y_i)(x_i - x_{i+1})}{y_i - y_{i+1}}.$$

3. Продолжаем построение фазовой траектории до следующего пересечения выбранного сечения. Находим координаты новой точки пересечения x_n^* .

4. Проверяем условие $|x_p^* - x_n^*| < \delta$ (рис. 26, б). Если условие неверно, выполняем присвоение $x_p^* = x_n^*$ и повторяем пункты 3 и 4. Если условие верно, удалось достичь требуемой точности нахождения цикла и переходим к пункту 5.

5. Запускаем построение траектории с последней точки (x_{i+1}, y_{i+1}) , записывая все пары точек в массивы, до очередного пересечения с сечением.

Таким образом, в массивах будут храниться пары точек, задающие цикл, количество элементов массивов k задает количество точек цикла, $T = kh$ — задает период цикла, где h — шаг численной схемы.

Алгоритм 2. Вычисление матрицы монодромии и мультипликаторов

Матрица монодромии $B = Z(T)$ задает отображение за период T системы (9) (см. раздел 3.2), поэтому, чтобы ее построить, необходимо найти образы векторов $z_1(0) = (1, 0)^T$, $z_2(0) = (0, 1)^T$ системы первого приближения вдоль конкретного цикла за один период.

Система первого приближения $\dot{z} = F(t)z$, $F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t))$, где $z = (z_1, z_2)^T$, $F = (f, g)^T$, $x = (x, y)^T$, может быть представлена в виде:

$$\dot{z}_1 = f'_x z_1 + f'_y z_2,$$

$$\dot{z}_2 = g'_x z_1 + g'_y z_2.$$

На входе алгоритма:

$[x_1, x_2, \dots, x_k], [y_1, y_2, \dots, y_k]$ — массивы координат точек цикла;

h — шаг численной схемы, с которым вычислен цикл;

k — количество точек цикла;

$z_1(0) = (z_{11}^0, z_{12}^0)^T$, $z_2(0) = (z_{21}^0, z_{22}^0)^T$ — начальные вектора.

На выходе:

$\begin{pmatrix} z_{11}^n & z_{21}^n \\ z_{12}^n & z_{22}^n \end{pmatrix}$ — матрица монодромии;

ρ_2 — мультипликатор.

1. Задаем начальные значения для первого и второго векторов $z_{11}^0 = 1, z_{12}^0 = 0$ и $z_{21}^0 = 0, z_{22}^0 = 1$.

2. Запускаем цикл по i от 1 до k , в теле цикла вычисляем:

$$z_{11}^n = z_{11}^0 + hf'_x(x_i, y_i)z_{11}^0 + hf'_y(x_i, y_i)z_{12}^0$$

$$z_{12}^n = z_{12}^0 + hg'_x(x_i, y_i)z_{11}^0 + hg'_y(x_i, y_i)z_{12}^0$$

$$z_{11}^0 = z_{11}^n$$

$$z_{12}^0 = z_{12}^n$$

$$z_{21}^n = z_{21}^0 + hf'_x(x_i, y_i)z_{21}^0 + hf'_y(x_i, y_i)z_{22}^0$$

$$z_{22}^n = z_{22}^0 + hg'_x(x_i, y_i)z_{21}^0 + hg'_y(x_i, y_i)z_{22}^0$$

$$z_{21}^0 = z_{21}^n$$

$$z_{22}^0 = z_{22}^n.$$

3. Завершение цикла означает, что был пройден полный период предельного цикла. Матрица составленная в виде $\begin{pmatrix} z_{11}^n & z_{21}^n \\ z_{12}^n & z_{22}^n \end{pmatrix}$ является матрицей монодромии.

4. Мультипликатор $\rho_2 = z_{11}'' z_{22}'' - z_{21}'' z_{12}''$. Для проверки нужно убедиться, что согласно теории $|\rho_2| < 1$.

Таким образом будут найдены матрица монодромии и мультипликатор, отличный от единицы.

Алгоритм 3. Построение эллипса рассеивания

Построение эллипса осуществляется в полярных координатах на основе ранее вычисленных собственных значений и собственных векторов матрицы стохастической чувствительности равновесия (см. раздел 6.4).

На входе алгоритма:

(\bar{x}, \bar{y}) — координаты равновесия;

λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы чувствительности;

$v_1 = (v_{11}, v_{12})^T, v_2 = (v_{21}, v_{22})^T$ — собственные векторы матрицы чувствительности;

ε — интенсивность случайного возмущения;

q — коэффициент, связанный с доверительной вероятностью следующим образом $q^2 = -\ln(1 - P)$, где P — доверительная вероятность, чаще всего используются значения 0,95 или 0,99.

На выходе:

$[x_1, x_2, \dots, x_n], [y_1, y_2, \dots, y_n]$ — массивы координат точек эллипса рассеивания.

1. Запускаем цикл по углу φ от 0 до 2π с некоторым шагом, в теле цикла вычисляем:

$$z_1 = \varepsilon k \sqrt{2\lambda_1} \cos \varphi$$

$$z_2 = \varepsilon k \sqrt{2\lambda_2} \sin \varphi$$

$$x_\varphi = \bar{x} + \frac{z_1 v_{22} - z_2 v_{12}}{v_{11} v_{22} - v_{12} v_{21}}$$

$$y_\varphi = \bar{y} + \frac{z_2 v_{11} - z_1 v_{21}}{v_{11} v_{22} - v_{12} v_{21}}.$$

Точки x_ϕ, y_ϕ записываем в соответствующие массивы.

2. Строим эллипс по парам последовательно найденных точек (x_ϕ, y_ϕ) .

Таким образом построен эллипс рассеивания вокруг заданного равновесия, с заданными интенсивностью шума и доверительной вероятностью.

Алгоритм 4. Построение теоретической функции чувствительности

Теоретическая функция чувствительности является решением следующей краевой задачи (см. раздел 6.3.):

$$\dot{m} = a(t)m + b(t),$$

$$m(0) = m(T).$$

где $a(t) = p^T(t)(F^T(t) + F(t))p(t)$,

$$b(t) = p^T(t)S(t)p(t),$$

$$F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)),$$

$$S(t) = G(t)G^T(t),$$

и нормированный вектор-нормаль может быть взят в виде

$$p(t) = \left(\frac{-g}{\sqrt{f^2 + g^2}}, \frac{f}{\sqrt{f^2 + g^2}} \right). \text{ Общее решение этой задачи имеет вид:}$$

$$m(t) = r(t)(C + h(t)),$$

$$\text{где } r(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}, \quad h(t) = \int_0^t \frac{b(s)}{r(s)} ds, \quad C = \frac{r(T)h(T)}{1 - r(T)}.$$

Таким образом, чтобы построить функцию чувствительности, необходимо найти значения двух интегралов с переменным верхним пределом вдоль заданного цикла. Для численного вычисления заданных интегралов в точках цикла потребуется задать их начальные значения:

$$r(0) = e^{\int_0^0 a(s)ds} = e^0 = 1, \quad h(0) = \int_0^0 \frac{b(s)}{r(s)} ds = 0,$$

На входе алгоритма:

$[x_1, x_2, \dots, x_k], [y_1, y_2, \dots, y_k]$ — координаты точек предельного цикла;

k — количество точек предельного цикла.

На выходе:

$[m_1, m_2, \dots, m_k]$ — массив значений функции чувствительности в точках цикла.

Так как для вычисления значений функции $m(t)$ на каждом шаге необходимо знать константу C , зависящую от значений функций $r(t)$ и $h(t)$ в конечной точке цикла, будем хранить значения этих функций соответственно в массивах $[r_1, r_2, \dots, r_k]$ и $[h_1, h_2, \dots, h_k]$. Для вычисления значений интегралов используется любая численная схема.

1. Присваиваем начальные значения $r_1 = 1, h_1 = 0$.

2. В цикле по i от 2 до k находим текущие значения интегралов

$r(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}$, $h(t) = \int_0^t \frac{b(s)}{r(s)} ds$ и записываем их в соответствующие массивы.

3. Окончание цикла означает, что осуществлен проход по всем точкам задающим цикл. Вычисляем значение константы по формуле

$$C = \frac{r_k h_k}{1 - r_k}.$$

4. В цикле по i от 1 до k , используя заполненные ранее массивы $[r_1, r_2, \dots, r_k], [h_1, h_2, \dots, h_k]$ и значение C , заполняем массив значений функции $m(t)$ по формуле $m_i = r_i (C + h_i)$.

Таким образом будет найден массив точек $[m_1, m_2, \dots, m_k]$, задающий значения функции стохастической чувствительности в каждой точке заданного цикла.

Алгоритм 5. Построение полосы рассеивания

Построение полосы рассеивания вдоль цикла осуществляется на основе значений функции стохастической чувствительности (см. раздел 6.4) по формуле

$$x_{1,2}(t) = \xi(t) \pm q\varepsilon\sqrt{2m(t)p(t)}, \quad t \in [0, T],$$

где нормированный вектор-нормаль может быть взят в виде

$$p(t) = \left(\frac{-g}{\sqrt{f^2 + g^2}}, \frac{f}{\sqrt{f^2 + g^2}} \right).$$

На входе алгоритма:

$[x_1, x_2, \dots, x_k], [y_1, y_2, \dots, y_k]$ — массивы координат точек предельного цикла;

k — количество точек предельного цикла;

$[m_1, m_2, \dots, m_k]$ — массив значений функции чувствительности в точках цикла;

ε — интенсивность случайного возмущения;

q — коэффициент связанный с доверительной вероятностью P следующим образом $q = \text{erf}^{-1}(P)$.

Основные уровни доверительной вероятности P и соответствующие им значения коэффициента k следующие:

P	q
0,9	1,163
0,95	1,386
0,99	1,821
0,999	2,4

На выходе:

$[x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1], [y_1^1, y_2^1, \dots, y_k^1]$ и $[x_1^2, x_2^2, \dots, x_k^2], [y_1^2, y_2^2, \dots, y_k^2]$ — массивы координат точек внешней и внутренней границ полосы рассеивания.

1. Запускаем цикл по i от 1 до k , в теле цикла вычисляем:

$$x_i^1 = x_i + q\varepsilon\sqrt{2m_i} \cdot \frac{-g(x'_i, y'_i)}{\sqrt{f^2(x'_i, y'_i) + g^2(x'_i, y'_i)}},$$

$$y_i^1 = y_i + q\varepsilon\sqrt{2m_i} \cdot \frac{f(x'_i, y'_i)}{\sqrt{f^2(x'_i, y'_i) + g^2(x'_i, y'_i)}},$$

$$x_i^2 = x_i - q\varepsilon\sqrt{2m_i} \cdot \frac{-g(x'_i, y'_i)}{\sqrt{f^2(x'_i, y'_i) + g^2(x'_i, y'_i)}},$$

$$y_i^2 = y_i - q\varepsilon\sqrt{2m_i} \cdot \frac{f(x'_i, y'_i)}{\sqrt{f^2(x'_i, y'_i) + g^2(x'_i, y'_i)}}.$$

Точки $x_i^{1,2}, y_i^{1,2}$ записываем в соответствующие массивы.

Строим две границы полосы рассеивания по парам последовательно найденных точек (x_i^1, y_i^1) и (x_i^2, y_i^2) .

Таким образом построена полоса рассеивания вокруг заданного предельного цикла, с заданными интенсивностью шума и доверительной вероятностью.

8. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1) Найти аттракторы детерминированной модели и провести исследование их устойчивости.

2) Исследовать стохастическую динамику при помощи прямого компьютерного моделирования случайных траекторий.

3) Построить функцию стохастической чувствительности для равновесий и циклов рассмотренных моделей, сравнить с результатами прямого численного моделирования.

4) Построить доверительные области (эллипсы, полосы) вокруг аттракторов модели.

1. Модель Лотки — Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy, \end{cases} \quad \alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma > 0, \delta \geq 0.$$

Для $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$; $\alpha = \delta = 1, \beta = \gamma = 4$.

2. Уравнение Ван-дер-Поля (мягкий режим возбуждения автоколебаний)

$$\ddot{x} - \delta(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

3. Уравнение Ван-дер-Поля (жесткий режим возбуждения автоколебаний)

$$\ddot{x} - \delta(1 + ax^2 - bx^4)\dot{x} + x = 0$$

(характерные значения параметров $a = 5, b = 0,5$).

4. Брюсселятор

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - (b+1)x + ax^2y, \\ \dot{y} = bx - ax^2y, \end{cases} \quad a > 0, b > 0.$$

5. Система Хопфа (жесткая бифуркация)

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) - y, \\ \dot{y} = y(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) + x. \end{cases}$$

6. Модель Базыкина

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\alpha x^2}{N+x} - \beta xy, \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy, \end{cases} \quad \alpha > 0, \beta \geq 0, \gamma > 0, \delta \geq 0.$$

Для $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$; $\alpha = \delta = 1, \beta = \gamma = 2$.

7. Модель Базыкина — Березовской с Олли-эффектом

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-l)(1-x) - xy, \\ \dot{y} = y(x-m), \end{cases}$$

где $l \in [0, 1]$ – пороговое значение Олли-эффекта, $m \in [0, 1]$ — скорость смертности хищника.

8. Модель «хищник — жертва» с кубической ограниченностью ресурса

$$\begin{cases} \dot{x} = (a + bx - x^2)x - xy, \\ \dot{y} = xy - my. \end{cases}$$

9. Модель Холлинга — Тэннера динамики системы «хищник — жертва»

$$\begin{cases} \dot{x} = r \left(1 - \frac{x}{K} \right) x - \frac{\alpha xy}{D+x}, \\ \dot{y} = s \left(1 - J \frac{y}{x} \right) y. \end{cases}$$

Устойчивый предельный цикл существует при условии $s < \frac{r(K-d-2)}{K(1+d)}$.

10. Уравнение Хайрера

$$\ddot{x} + x = \delta \dot{x} - \dot{x}^3.$$

11. Уравнение Дуффинга

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x - lx^3 = 0.$$

12. Гликолитический осциллятор Хиггинса

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy, \\ \dot{y} = py \left(x - \frac{1+q}{q+y} \right), \end{cases} \quad p > 0, q > 0.$$

13. Модель Германа

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - x^3 - y, \\ \dot{y} = x - a. \end{cases}$$

14. Модель Фицхью — Нагумо

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\varepsilon} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) - \frac{y}{\varepsilon}, \\ \dot{y} = x + a, \end{cases} \quad a > 0.$$

15. Модель Ван-дер-Поля — Дуффинга

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x - lx^3 = 0.$$

16. Генератор с жестким возбуждением автоколебаний

$$\ddot{x} + x - (l + mx^2 - x^4)\dot{x} = 0.$$

Устойчивый предельный цикл существует при условии $l > -\frac{m^2}{8}$.

17. Модель нелинейного акселератора-мультипликатора Гудвина

$$\ddot{Y} + \frac{1}{\theta} \frac{Y^2 - 1}{Y^2 + 1} \dot{Y} - \frac{\alpha - 1}{\varepsilon \theta} Y + \frac{-\gamma}{\varepsilon \theta} Y^3 = 0,$$
$$\alpha > 1, \gamma < 0, \varepsilon \in (0, 1], \theta = 2.$$

18. Модель бизнес-циклов

$$\ddot{x} + (1 - a)\dot{x} + (1 + a)x^3 + bx = 0.$$

19. Модель экономической динамики Калдора

$$\begin{cases} \dot{Y} = \alpha(I(Y) + \beta K - 0,5Y), \\ \dot{K} = I(Y) - (\beta + 0,5)K, \end{cases}$$
$$I(Y) = \frac{1}{1 + e^{-4,2(Y-1)}} + 0,6, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

20. Система Ресслера

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + \alpha y, \\ \dot{z} = \alpha + z(x - \mu), \end{cases}$$
$$\alpha = 0,2, \mu > 0.$$

21. Трехмерный брюсселятор

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2 y - (z + 1)x, \\ \dot{y} = xz - x^2 y, \\ \dot{z} = -xz + \alpha, \end{cases} \\ \alpha > 0.$$

22. Генератор Анищенко — Астахова

$$\begin{cases} \dot{x} = mx + y - xz, \\ \dot{y} = -x, \\ \dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \end{cases} \\ I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

23. Химический осциллятор

$$\begin{cases} \dot{x} = 3 - x - \lambda xz, \\ \dot{y} = x - yz, \\ \dot{z} = yz - \lambda xz, \end{cases} \\ \lambda > 0.$$

24. Система Чена

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = x(c - a) - xz + cy, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \\ a = 45, c = 28, b > 0.$$

СПИСОК БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ ССЫЛОК

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М. : Наука, 1967. 472 с.
2. Ryashko L., Bashkirtseva I. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced excitement in a prey-predator plankton system // *Frontiers in Life Science*. 2011. V. 5. P. 141–148.
3. Bashkirtseva I., Ryashko L. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect // *Chaos*. 2011. V. 21. P. 047514.
4. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity of 3D-cycles // *Mathematics and Computers in Simulation*. 2004. V. 66. P. 55–67.
5. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // *J. Atmos. Sci.* 1963. V. 20. P. 130–141.
6. Sparrow C. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors // *Springer Series in Applied Mathematics*. 1982. V. 41. 270 p.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Андронов А. А. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, Н. Н. Гордон, А. Г. Майер. М. : Наука, 1966. 568 с.

Арнольд В. И. Теория катастроф / В. И. Арнольд. М. : Наука, 1990. 128 с.

Базыкин А. Д. Портреты бифуркаций / А. Д. Базыкин, Ю. А. Кузнецов, А. И. Хибник. М. : Знание, 1989. 48 с.

Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций / А. Д. Базыкин. М. : Наука, 1985. 181 с.

Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. М. : Наука, 1987. 600 с.

Берже П. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности / П. Берже, И. Помо, К. Видаль. М. : Мир, 1991. 368 с.

Васин В. В. Элементы нелинейной динамики: от порядка к хаосу / В. В. Васин, Л. Б. Ряшко. Москва; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» ; Ин-т комп. исследований, 2006. 164 с.

Кузнецов А. П. Колебания, катастрофы, бифуркации, хаос / А. П. Кузнецов. Саратов : Изд-во гос. УНЦ Колледж, 2000. 98 с.

Кузнецов С. П. Динамический хаос / С. П. Кузнецов. М. : Наука, 2001. 296 с. (Серия: Современная теория колебаний и волн).

Лихтенберг А. Регулярная и хаотическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либман. М. : Мир, 1984. 528 с.

Лобанов А. И. Вычислительные методы для анализа моделей сложных динамических систем / А. И. Лобанов, И. Б. Петров. М. : Изд. МФТИ, 2000. 168 с.

Малинецкий Г. Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов. М. : Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.

Неймарк Ю. И. Стохастические и хаотические колебания / Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда. М. : Наука, 1987. 424 с.

Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. М. : Наука, 1974. 331 с.

Пригожин И. Порядок из хаоса: новый диалог с природой / И. Пригожин, И. Стенгерс. М. : Прогресс, 1986. 432 с.

Ризниченко Г. Ю. Математические модели биологических продукционных процессов / Г. Ю. Ризниченко, А. Б. Рубин. М. : Изд. МГУ, 1993. 302 с.

Хайпер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Нежесткие задачи / Э. Хайпер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. М. : Мир, 1990. 512 с.

Чуличков А. И. Математические методы нелинейной динамики / А. И. Чуличков. М. : Наука, 2000. 296 с.

Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение / Г. Шустер. М. : Мир, 1988. 240 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО СВОЙСТВА	5
1.1. Основные понятия	5
1.2. Метод фазового пространства.....	6
1.3. Устойчивость	6
1.4. Фазовые портреты линейных систем.....	8
2. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ПОКОЯ .	11
2.1. Система первого приближения	11
2.2. Устойчивость точки покоя.....	13
3. АНАЛИЗ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ЦИКЛА.....	19
3.1. Основные понятия. Система первого приближения.....	19
3.2. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Элементы теории Флоке	22
3.3. Экспоненциальная устойчивость цикла	24
4. БИФУРКАЦИИ	26
5. СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА	32
6. ТЕОРИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ.....	37
6.1. Стохастическое равновесие.....	38
6.2. Стохастический цикл	39
6.3. Случай цикла на плоскости.....	40
6.4. Случай цикла в трехмерном пространстве.....	42
6.5. Доверительные области.....	47
7. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.....	64
7.1. Численные методы решения систем дифференциальных уравнений.....	65
7.2. Компьютерное моделирование стохастических траекторий.....	67
7.3. Основные алгоритмы	68
8. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ	76
СПИСОК БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ ССЫЛОК	80
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	81

Учебное издание

Башкирцева Ирина Адольфовна
Рязанова Татьяна Владимировна
Ряшко Лев Борисович

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Учебное пособие

Заведующий редакцией
Редактор
Корректор
Оригинал-макет

*М. А. Овечкина
Е. Е. Крамаревская
Е. Е. Крамаревская
Л. А. Хухаревой*

План выпуска 2017 г. Подписано в печать 18.05.04.2017
Формат 60 × 84^{1/16}. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 4,5. Усл. печ. л. 4,9. Тираж 50 экз. Заказ 17.
Издательство Уральского университета
620000, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.
Тел.: + (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс +7 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru

